目录

第1章 常用逻辑用语

逻辑规矩有方圆，
当且仅当令如山，
或者婉言容选择，
充分游刃天地宽。

人与人之间交流的语言，基本上分为两类：一类是感性语言，一类是理性语言．感性语言是对视、听、闻、触摸等获取的信息所作的表达，理性语言则是对大脑中的思维活动所作的表达．逻辑用语就是一种理性语言，是表达理性思维的载体．

学习常用逻辑用语，掌握常用逻辑用语的用法，就可以利用这些逻辑用语准确、简洁地表述数学内容和数学思想．同时，在各种交流活动中，也可以利用这些逻辑用语严密地表述对各种问题的思考结果．

1.1 命题及其关系

1.1.1 命题的概念和例子

数学知识的丰富和数学的发展依赖于人们不断地提出命题并力图证明这些命题．在各种社会实践中，人们也提出许多命题供思考和讨论．那么，什么是命题呢？

在数学课中曾遇到过大量如下的语句：

（1）三角形的三内角之和等于 $180°$．

（2）如果 a，b 是任意两个正实数，那么 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$．

（3）$\sin 60°=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

（4）如果实数 a 满足 $a^2=9$，那么 $a=3$．

在报刊上，也读到过这样的句子：

（5）中学生目前的学业负担过重．

（6）中国将在本世纪中叶达到中等发达国家的水平．

上述这些句子都叫作命题，它们的共同特征是每个句子都陈述了能够判断其成立或不成立的一件事情．

可以判断成立或不成立的语句叫作命题（proposition），成立的

命题叫作真命题（true proposition）．不成立的命题叫作假命题（false proposition）．例如，上述命题（1）、（2）是两个真命题，而命题（3）、（4）是两个假命题．命题（5）、（6）的真假性需要根据实际情况确定，但总之不是真命题就是假命题．

社会生活中的许多命题很难确定真假，否则各种理论的争鸣就失去了存在的理由．

例 已知 a、b 是两个实数，试证：

（1）命题"如果 a，b 是正实数且 $a^2>b^2$，那么 $a>b$"是真命题；

（2）命题"如果 a，b 是任意实数且 $a^2>b^2$，那么 $a>b$"是假命题．

证 （1）∵ $a^2>b^2$，∴ $a^2-b^2=(a-b)(a+b)>0$．

∵ $a>0$，$b>0$，∴ $a+b>0$．

因此，$a-b>0$，即 $a>b$．

于是，命题(1)是真命题．

（2）取 $a=-2$，$b=1$，$a^2>b^2$，但 $a<b$．于是，命题(2)是假命题．

说明假命题的通常方法是举出一个反例．

练　习

判断下列语句是否是命题，若是，则判断其真假．

（1）$x\leq 4$；

（2）有两个角为 $45°$ 的三角形是等腰直角三角形；

（3）方程 $x^2+1=0$ 没有实数根．

习题 1

学而时习之

1．判断下列命题的真假：

(1) 若 a，b 是任意实数，则 $|a|+|b|>0$；

(2) 若 x，y 是实数且 $x^2+y^2=0$，则 $x=y=0$.

温故而知新

2. 试证：

(1) 命题“若 $m>0$，则 $x^2+x-m=0$ 有两个不同的实数根”是真命题；

(2) 命题“若 $x^2+x-m=0$ 有两个不同的实数根，则实数 $m>0$”是假命题.

3. 试独立举出数学上一个真命题和一个假命题的例子.

上下而求索

4. 命题“中学生目前的学业负担过重”是真命题还是假命题？说明理由.

1.1.2 命题的四种形式

同学们在初中阶段已学过命题与逆命题的知识，知道如何构造一个命题的逆命题，也知道当一个命题为真时，它的逆命题可以为真也可以为假. 如果把两个互逆的命题中的一个叫作原命题，那么另一个叫作原命题的逆命题.

例如：

(1) 原命题　若两个三角形全等，则它们相似；

(2) 逆命题　若两个三角形相似，则它们全等.

又如：

(3) 原命题　若两个三角形不全等，则它们不相似；

(4) 逆命题　若两个三角形不相似，则它们不全等.

你能发现内在的规律吗？

仔细分析上述四个命题的构成，容易发现它们之间有内在的联

系：由其中一个命题出发能够构造出其余的三个命题.

命题通常由两部分构成——命题的条件部分和命题的结论部分. 例如，命题(1)的条件部分是“两个三角形全等”，结论部分是“两个三角形相似”. 分析上述四个命题的条件部分和结论部分就能发现：命题(2)的条件部分是命题(1)的结论部分，命题(2)的结论部分是命题(1)的条件部分；命题(3)的条件部分和结论部分分别是命题(1)的条件部分和结论部分的否定；命题(4)的条件部分是命题(1)的结论部分的否定，命题(4)的结论部分是命题(1)的条件部分的否定. 在这种情况下，如果把命题(1)看作原命题，那么命题(2)叫作命题(1)的逆命题，命题(3)叫作命题(1)的否命题，命题(4)叫作命题(1)的逆否命题. 这就是所谓的命题的四种形式.

我们讨论的命题都是条件和结论比较明显的命题.

分析命题的条件和结论是关键.

用符号抽象地表示命题可以更清晰地显示命题的四种形式. 通常用小写拉丁字母 p，q，r，s，… 表示最简单的命题，记号 $\neg p$ 表示命题 p 的否定，即不是 p. 如果 p，q 表示两个命题，那么命题“若 p 则 q”的四种形式是：

原命题（original proposition）　若 p 则 q；

逆命题（converse proposition）　若 q 则 p；

否命题（negative proposition）　若 $\neg p$ 则 $\neg q$；

逆否命题（converse-negative proposition）　若 $\neg q$ 则 $\neg p$.

以命题四种形式中的任一种作为原命题，可推出其他的命题形式吗？

命题的四种形式中，任一对命题之间的相互关系如下图所示：

例 1　分别写出下列两个命题的四种形式：

(1) 若 $\alpha=60^\circ$，则 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

(2) 设 $a>0$，$b>0$，若 $a>b$，则 $a^2>b^2$.

解 (1) 原命题 若 $\alpha=60^\circ$，则 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

逆命题 若 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\alpha=60^\circ$；

否命题 若 $\alpha\neq 60^\circ$，则 $\sin\alpha\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$；

逆否命题 若 $\sin\alpha\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\alpha\neq 60^\circ$.

(2) 原命题 设 $a>0$，$b>0$. 若 $a>b$，则 $a^2>b^2$；

逆命题 设 $a>0$，$b>0$. 若 $a^2>b^2$，则 $a>b$；

否命题 设 $a>0$，$b>0$. 若 $a\leqslant b$，则 $a^2\leqslant b^2$；

逆否命题 设 $a>0$，$b>0$. 若 $a^2\leqslant b^2$，则 $a\leqslant b$.

例 2 把下列命题改写成"若 p 则 q"的形式，并写出它们的逆命题、否命题和逆否命题.

关键是写好原命题的条件 p 和结论 q.

(1) 矩形的两条对角线互相平分；

(2) 小于 -5 的数的平方大于 25.

解 (1) 原命题 若四边形是矩形，则它的两条对角线互相平分；

逆命题 若四边形的两条对角线互相平分，则它是矩形；

否命题 若四边形不是矩形，则它的两条对角线不互相平分；

逆否命题 若四边形的两条对角线不互相平分，则它不是矩形.

(2) 原命题 若 $a<-5$，则 $a^2>25$；

逆命题 若 $a^2>25$，则 $a<-5$；

否命题 若 $a\geqslant -5$，则 $a^2\leqslant 25$；

逆否命题 若 $a^2\leqslant 25$，则 $a\geqslant -5$.

我们已经知道，当原命题为真时，它的逆命题可以为真也可以为假. 那么，原命题的真假性同它的否命题及逆否命题的真假性之间是否有关系呢？

原命题为真时不能判断它的逆命题的真假性，因此，考虑一个命题的逆命题是得出新命题的一个来源.

1. 原命题为真，它的逆命题可以为真，也可以为假.

例 3 试证：

(1) 设 a、b、c 分别表示 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对边的边

长，命题“若$\angle C$为钝角，则$c^2>a^2+b^2$”的逆命题是真命题；

（2）命题“两个正数之积仍为正数”的逆命题是假命题.

证　（1）逆命题是：设a，b，c分别表示$\triangle ABC$中$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$所对边的边长，若$c^2>a^2+b^2$，则$\angle C$为钝角.

利用三角形的余弦定理，

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0，且\quad 0°<\angle C<180°，$$

所以$\angle C>90°$.

因此，(1)中命题的逆命题是真命题.

（2）逆命题是：若$ab>0$，则$a>0$且$b>0$.

取$a=b=-1$，$ab>0$，但$a<0$.

因此，(2)中命题的逆命题是假命题.

2．原命题为真，它的逆否命题一定为真.

逆否命题不产生新命题.

事实上，逆否命题只是原命题的另一种陈述.

例如：

原命题　若$a=0$，则$ab=0$；

逆否命题　若$ab\neq0$，则$a\neq0$.

又如：

原命题　最高气温超过30 ℃时我就开空调；

逆否命题　若我没有开空调，则最高气温不超过30 ℃.

3．原命题为真，它的否命题可以为真，也可以为假.

否命题总是原命题的逆命题的逆否命题！

例如：真命题“若$a>0$，则$a^2>0$”的否命题“若$a\leqslant0$，则$a^2\leqslant0$”是真命题，而真命题“若$a>0$，则$a^2>0$”的否命题“若$a\leqslant0$，则$a^2\leqslant0$”是假命题.

练　习

1．写出下列命题的四种形式：

（1）若两个三角形全等，则它们的面积相等；

（2）若 $a>0$，则 $a^2>0$.

2. 写出命题“正方形的对角线互相垂直”的逆命题、否命题和逆否命题，并判断它们的真假.

3. “原命题为真，它的否命题一定为假”的说法是否正确，举例说明.

习题 2

学而时习之

1. 把下列命题改写成“若 p 则 q”的形式，并分别写出它们的逆命题、否命题和逆否命题：

（1）正方形的四条边相等；

（2）末位是 5 的整数可以被 5 整除；

（3）当 $a>0$ 时，函数 $y=ax+b$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

2. 写出下列命题的逆命题、否命题和逆否命题，并分别判断它们的真假：

（1）设 a，b，c 为任意实数，若 $a=b$，则 $ac=bc$；

（2）到圆心的距离等于该圆半径的直线是圆的切线；

（3）$x=5$ 是方程 $x^2-4x-5=0$ 的根.

3. 判断下列说法是否正确：

（1）一个命题的逆命题为真，它的否命题也为真；

（2）原命题为假，它的逆否命题也为假.

温故而知新

4. 写出下列命题的四种形式：

（1）两个偶数之积仍是一个偶数；

（2）$\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. 试证下列两个命题的逆命题都是假命题：

（1）设 a 是整数，若 a 是 4 的倍数，则 a^2 是 8 的倍数；

（2）二次函数的图象一定有对称轴.

6. 写出下列命题的四种形式，并分别判断它们的真假性：

（1）设 a，b，c 是任意三个实数，若 $a>b$，则 $ac>bc$；

（2）函数 $y=x^2$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

1.1.3 充分条件和必要条件

上节我们讨论了“若 p 则 q”这种形式的命题，本节我们将通过命题“若 p 则 q”的真假性讨论 p 和 q 的真假性之间的联系.“若 p 则 q”为真命题指当 p 成立时，q 一定也成立，换句话说，p 成立可以推出 q 成立. 在这种情况下，记作 $p\Rightarrow q$，并把 p 叫作命题 q 的充分条件（sufficient condition），q 叫作 p 的必要条件（necessary condition）. $p\Rightarrow q$ 可以理解为一旦 p 成立，q 一定也成立，即 p 对于 q 的成立是充分的；换个角度考虑，一旦 q 不成立，p 一定也不成立，即 q 对于 p 的成立是必要的.

当命题“若 p 则 q”为假命题时，记 $p\nRightarrow q$. 在这种情况下，p 是 q 的不充分条件，q 是 p 的不必要条件.

例如：“若 $a=b$，则 $a^2=b^2$”是真命题，可写成 $a=b\Rightarrow a^2=b^2$，$a=b$ 叫作 $a^2=b^2$ 的一个充分条件，$a^2=b^2$ 是 $a=b$ 的一个必要条件. 而“若 $a^2=b^2$，则 $a=b$”是假命题，可写成 $a^2=b^2\nRightarrow a=b$，$a^2=b^2$ 是 $a=b$ 的一个不充分条件，$a=b$ 是 $a^2=b^2$ 的一个不必要条件.

如果对两个命题 p 和 q，既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，就记作 $p\Leftrightarrow q$. 这时，p 既是 q 的充分条件，又是 q 的必要条件，就叫作 p 是 q 的充分必要条件（sufficient and necessary condition），简称充要条件. p 是 q 的充分必要条件指 p 成立当且仅当（if and only if）q 成立. 在这种情况下，命题 p 和命题 q 称为两个互相等价（equivalent）的命题. 两个互相等价的命题通常是对同一事物从不同角度所作的描述.

例如，p：两个三角形的两角夹边对应相等，q：两个三角形的

三边分别对应相等，$p \Leftrightarrow q$. 事实上，p 和 q 分别描述了两个三角形全等的条件.

例 1 从“充分而不必要条件”、“必要而不充分条件”和“充要条件”中选择适当的一种填空.

(1) 四边形的对角线相等是四边形是矩形的________；

(2) $a \geqslant 5$ 是 a 为正数的________；

(3) 四边形的一组对边平行且相等是四边形的两组对边分别平行的________.

解 (1) 四边形是矩形⇒四边形的对角线相等. 因此，(1)中应填“必要而不充分条件”.

(2) $a \geqslant 5 \Rightarrow a > 0$. 因此，(2)中应填“充分而不必要条件”.

(3) 四边形的一组对边平行且相等⇔四边形的两组对边分别平行. 它们实际上都在描述四边形是平行四边形. 因此，(3)中应填“充要条件”.

例 2 试证：

(1) 在实数范围内，$x=1$ 是 $x^2=1$ 的充分而不必要条件；

(2) 四边形的两组对边分别相等是四边形是矩形的必要而不充分条件.

充分性的证明：条件⇒结论；必要性的证明：结论⇒条件.

证 (1) $x=1 \Rightarrow x^2=1$，$x=1$ 是 $x^2=1$ 的充分条件；由于 $(-1)^2=1$，$x^2=1 \nRightarrow x=1$，$x=1$ 不是 $x^2=1$ 的必要条件. 因此，$x=1$ 是 $x^2=1$ 的充分而不必要条件.

(2) 记 p：四边形的两组对边分别相等，q：四边形是矩形. $q \Rightarrow p$，p 是 q 的必要条件. 由于平行四边形的两组对边分别相等，$p \nRightarrow q$，p 不是 q 的充分条件. 因此，四边形的两组对边分别相等是四边形是矩形的必要而不充分条件.

例 3 指出下列各组命题中，p 是 q 的什么条件（在“充分而不必要条件”、“必要而不充分条件”、“充要条件”、“既不充分也不必要条件”中选出一种）？为什么？

(1) 设 x，$y \in \mathbf{R}$，p：$x^2+y^2>0$，q：x、y 都不为零；

(2) p：两个三角形的三条边对应成比例，q：两个三角形有两

个角对应相等；

(3) p：$0<x<1$，q：$\sin x>0$；

(4) 设 x 是整数，p：x 是 6 的倍数，q：x 是 8 的倍数.

解 (1) x、y 都不为零 $\Rightarrow x^2+y^2>0$；取 $x=0$，$y=1$，$x^2+y^2>0$，但 $x=0$，即 $p \nLeftarrow q$.

所以 p 是 q 的必要而不充分条件.

(2) p 和 q 分别描述了两个三角形相似的条件，$p \Leftrightarrow q$.

所以 p 是 q 的充要条件.

(3) ∵ $0<x<1<\frac{\pi}{2}$，∴ $\sin x>0$，$p \Rightarrow q$；取 $x=\frac{5}{2}\pi$，$\sin x>0$，但 $\frac{5}{2}\pi>1$，$q \nRightarrow p$.

所以 p 是 q 的充分而不必要条件.

(4) 取 $x=6$，x 不是 8 的倍数，$p \nRightarrow q$；又取 $x=8$，x 不是 6 的倍数，$q \nRightarrow p$.

所以 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

分别考虑命题"若 p 则 q"和"若 q 则 p"的真假性.

充分条件、必要条件和充要条件究竟有什么用处？事实上，很多数学知识都是由这种形式的命题给出. 例如，"互相平行的平面同第三个平面相交所得的交线互相平行"、"菱形的对角线互相垂直平分"、"函数 $y=\sin x$ 的值域是 $[-1,1]$"、"设 $a>0$，$b>0$，$a+b=2\sqrt{ab}$ 当且仅当 $a=b$". 如果已知 $p\Rightarrow q$，那么证明命题 q 成立的一种方法就是证明命题 p 成立.

如果已知 $p\Rightarrow q$，你能给出一种证明命题 p 不成立的方法吗？

例 4 试证方程 $\frac{4}{\pi}\sin x=1$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内有解.

证 ∵ $0<\frac{\pi}{4}<1$，由于函数 $y=\sin x$，$0<x<\frac{\pi}{2}$ 的值域是 $(0,1)$，

∴ 方程 $\sin x=\frac{\pi}{4}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内有解，即 $\frac{4}{\pi}\sin x=1$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内有解.

$a\in(0,1)$ 是方程 $\sin x=a$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内有解的一个充分条件.

练 习

1. 下列命题中，哪些命题是“四边形是矩形”的充分条件？

   (1) 四边形的对角线相等；

   (2) 四边形的两组对边分别相等；

   (3) 四边形有三个内角都为直角；

   (4) 四边形的两组对边分别平行且有一组对角互补。

2. 设 x，$y\in\mathbf{R}$，下列各式中哪些是“$xy\neq0$”的必要条件？

   (1) $x+y=0$；　　　　(2) $x^2+y^2>0$；

   (3) $x^2+y^2\neq0$；　　　　(4) $x^3+y^3\neq0$。

3. 从“充分而不必要条件”、“必要而不充分条件”、“充要条件”与“既不充分又不必要的条件”中选出适当的一种填空：

   (1) “$\triangle ABC$ 中 $\angle C=90°$”是“$\triangle ABC$ 中 $AB^2=AC^2+BC^2$”的________；

   (2) “$x>0$”是“$x\geq1$”的________；

   (3) “$x=2$”是“$x^2=4$”的________。

习题 3

学而时习之

1. 从“充分而不必要条件”、“必要而不充分条件”、“充要条件”与“既不充分又不必要条件”中选出适当的一种填空：

   (1) “两个角是对顶角”是“两个角相等”的________；

   (2) “$a-1$ 是无理数”是“a 是无理数”的________；

   (3) “$a>0$，$b>0$”是“$a+b>1$”的________；

   (4) 设 a，b，c 都是整数，“ab 是 c 的倍数”是“a，b 中至少有一个是 c 的倍数”的________；

   (5) “$0<x<1$”是“$x^2<x$”的________。

温故而知新

2. 指出下列各组命题中，p 是 q 的什么条件（在"充分而不必要条件"、"必要而不充分条件"、"充要条件"、"既不充分也不必要条件"中选出一种）？为什么？

(1) 设 x，y 是实数，p：$x>y$，q：$|x|>|y|$；

(2) p：$a\in \mathbf{N}_+$，q：$a\in \mathbf{Z}$；

(3) p：D 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中线上，q：$\triangle ABD$ 的面积 $=\triangle ACD$ 的面积；

(4) p：$2\lg a=\lg(5a-6)$，q：$a=2$；

(5) p：小王的学习成绩优秀，q：小王是三好学生.

3. 已知一个整数的各位数字之和是 3 的倍数，则该整数是 3 的倍数. 判断下列命题中哪些是 6 的倍数的充分条件，哪些不是. 为什么？

(1) 整数的各位数字之和是 6 的倍数；

(2) 整数的各位数字之和是 6 的倍数且该数是偶数；

(3) 整数的末位数字是 6；

(4) 整数的各位数字之和是 3 的倍数.

4. "$x^2\neq 1$" 是 "$x\neq 1$" 的必要条件吗？为什么？

5. 试证 "$x>1$" 是 "$\frac{1}{x}<1$" 的充分而不必要条件.

6. 试证 "$a>0$，$b>0$" 的充要条件是 "$a+b>0$，$ab>0$".

7. 设 a、b、c 都是自然数，试写出 "$a+b+c$ 是偶数" 的一个充分而不必要条件，并说明理由.

8. 判断下列命题的真假，并说明理由：

(1) "$a>b>0$" 是 "$a^2>b^2$" 的充要条件；

(2) "$a>b$" 是 "$ac^2>bc^2$" 的充分条件；

(3) "$a>b$" 是 "$a+c>b+c$" 的充要条件.

1.2 简单的逻辑联结词

人说话时或书面表达意思时，一句接着一句，句子之间需要用联结词连接，不同的联结词表达的意思有很大的差别．特别地，数学表达更需要精确和严密．本节我们讨论简单逻辑联结词．

1.2.1 逻辑联结词“非”、“且”和“或”

1．联结词“非”(not)．

设 p 是一个命题，联结词“非”是对命题 p 作否定，得到命题“非 p”或“不是 p”，记作 $\neg p$．

例 1 写出下列命题 p 的否定 $\neg p$：

(1) p：a 是大于 5 的实数；

(2) p：矩形的对角线互相垂直；

(3) p：16 不是 5 的倍数；

(4) 我们班上每个同学都能言善辩．

解 (1) $\neg p$：a 是不大于 5 的实数；

(2) $\neg p$：矩形的对角线不互相垂直；

(3) $\neg p$：16 是 5 的倍数；

(4) 我们班上并非每个同学都能言善辩．

由于 $\neg p$ 是命题 p 的否定，因此，p 为真命题当且仅当 $\neg p$ 为假命题．

2．联结词“且”(and)．

联结词“且”用来联结两个命题 p，q 得到新命题“p 且 q”，记作 $p\wedge q$．

例如：如果 p：$x\geqslant 3$，q：$x\leqslant 5$，那么 $p\wedge q$：$3\leqslant x\leqslant 5$．

“$p\wedge q$”为真命题当且仅当 p 和 q 都为真命题．可用串联电路直

观地显示（如图1-1）：当且仅当开关p合上且开关q也合上时灯才会亮.

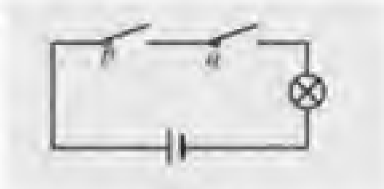


图1-1

具体地，命题$p\wedge q$的真假性由表1.1给出：

表1.1

p	q	$p\wedge q$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

例2 根据下列命题中的p，q，写出命题$p\wedge q$，并判断其真假：

（1）p：矩形的对角线互相平分，q：矩形的对角线互相垂直；

（2）p：函数$y=x^2$在$(0,+\infty)$上单调递增，q：函数$y=x^2$在$(-\infty,0)$上单调递减.

解 （1）$p\wedge q$：矩形的对角线互相垂直平分. 因为q为假命题，所以$p\wedge q$为假命题.

（2）$p\wedge q$：函数$y=x^2$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增. 因为p，q都为真命题，所以$p\wedge q$为真命题.

3. 联结词“或”(or).

联结词“或”用来联结两个命题p，q得到新命题“p或q”，记作$p\vee q$.

例如：如果p：$x\in(-\infty,-1)$，q：$x\in(1,+\infty)$，那么，$p\vee q$：$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

“$p\vee q$”为真命题当且仅当p和q中至少有一个为真命题. $p\vee q$可用并联电路直观地显示（如图1-2），当且仅当开关p和q中有一个合上时灯就会亮.

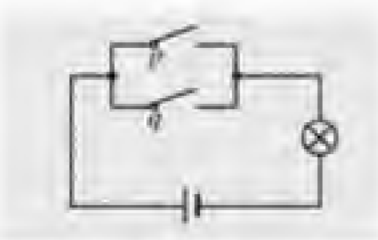


图1-2

具体地，命题 $p \vee q$ 的真假性由表 1.2 给出：

表 1.2

p	q	$p \vee q$
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

例 3 根据下列命题的 p，q，写出命题“$p \vee q$”，并判断其真假：

(1) p：5 是集合 $\{2, 3, 4\}$ 中的元素，q：3 是集合 $\{2, 3, 4\}$ 中的元素；

(2) p：方程 $x^2+x-1=0$ 有两个正实数根，q：方程 $x^2+x-1=0$ 有两个负实数根.

解 (1) $p \vee q$：集合 $\{2, 3, 4\}$ 中含有数 5 或 3. 由于 q 是真命题，$p \vee q$ 是真命题.

(2) $p \vee q$：方程 $x^2+x-1=0$ 有两个正实数根或有两个负实数根. 由于 p，q 都是假命题，$p \vee q$ 是假命题.

练 习

1. 把下列命题改写成 $p \vee q$ 或 $p \wedge q$ 的形式：

   (1) 若 $x=5$，$y=6$，则 $x>y$ 或 $x<y$；

   (2) $\sqrt{2}$ 是实数且 $\sqrt{2}$ 是有理数.

2. 根据下列各组命题中的 p，q，写出命题“$p \wedge q$”、“$p \vee q$”、“$\neg p$”，并判断其真假.

   (1) p：10 是偶数，q：10 是奇数；

   (2) p：$x=1$ 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的根，q：$x=-1$ 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的根.

习题 4

学而时习之

1．判断下列命题的真假：

（1）方程 $x^2-3x-4=0$ 的判别式大于或等于0；

（2）正方形是轴对称图形且正三角形也是轴对称图形．

2．根据下列各组命题中的 p，q，写出命题“$p\wedge q$”、“$p\vee q$”、“$\neg p$”，并判断其真假．

（1）p：方程 $x^2+1=0$ 没有实根，q：方程 $x^2-5=0$ 没有实根；

（2）p：矩形的四个内角都相等，q：三角形的三个内角都相等．

温故而知新

3．分别写出由下列各组命题构成的命题“$\neg p$”、“$p\vee q$”和“$p\wedge q$”，并判断它们的真假．

（1）p：$y=\cos x$ 在 $(0,\ 2)$ 内单调递增，q：$y=\cos x$ 在 $(0,\ \pi)$ 内恒大于0；

（2）p：2是集合$\{2\}$中的元素，q：2不是集合$\{3,\ 4,\ 5\}$中的元素；

（3）p：有两个角为30°的三角形是锐角三角形，q：有两个角为30°的三角形是直角三角形；

（4）p：方程 $x^2+3x-1=0$ 的两根符号不同，q：方程 $x^2+3x-1=0$ 的两根之和为3．

1.2.2 全称量词和存在量词

全称量词和存在量词不但在数学里经常使用，在日常生活中也经常使用．

例如，市场上卖鸡蛋的老太太说："我篮子里的每一个鸡蛋都是好的."老太太正确地叙述了一个含有全称量词的命题."每一个"是全称量词并且指出了全称量词"每一个"的作用范围是"我篮子里的鸡蛋"，不是市场上的所有鸡蛋.

在数学里也有许多使用量词的命题.

例如：对任意实数 a，$a^2+1>0$. "任意"是一个全称量词，命题中全称量词"任意"的作用范围是实数集 $\mathbf{R}$.

又如：存在某个整数 a 使得 a^2-1 是 5 的倍数."存在某个"是存在量词，命题中它的作用范围是整数集 $\mathbf{Z}$.

为什么量词的作用范围如此重要？

"任意"、"所有"、"每一个"等叫作全称量词（universal quantifier），数学上用符号"$\forall$"表示."存在"、"某一个"、"至少有一个"等叫作存在量词（existential quantifier），数学上用符号"$\exists$"表示.涉及量词的命题必须指出量词的作用范围.

例 1 指出下列两个含有量词的命题中使用了什么量词及量词的作用范围，并把量词用相应的数学符号取代.

(1) 对任意正实数 a，$a^2-a-2>0$；

(2) 对某个大于 10 的正整数 n，$(\sqrt{2})^n=1\,024$.

解 (1) 命题 (1) 中有量词"任意"，这是一个全称量词，它的作用范围是正实数集合.命题 (1) 可以写成"$\forall a>0$，$a^2-a-2>0$".

(2) 命题 (2) 中有量词"某个"，这是一个存在量词，它的作用范围是大于 10 的正整数集合.命题 (2) 可以写成"$\exists n>10$，$n\in\mathbf{N}_+$，$(\sqrt{2})^n=1\,024$".

如何判断含有量词的命题的真假呢？命题"我篮子里的每一个鸡蛋都是好的"究竟是真命题还是假命题？如果篮子里的每个鸡蛋确实是好的，这个命题是真命题；只要篮子里有某一个鸡蛋是坏的，这个命题就是假命题.

需要对每一个实数 a 验证.

例如：因为对每个实数 a，$a^2+1>0$ 成立，所以命题"$\forall a\in\mathbf{R}$，$a^2+1>0$"是真命题.

又如：因为 $4^2-1=15$，所以命题"$\exists a\in \mathbf{Z}$，a^2-1 是 5 的倍数"是真命题.

找到一个 $a=4$ 就足够了

例 2 判断下列命题的真假，并给出证明：

(1) $\forall x\in(5,+\infty)$，$f(x)=x^2-4x-2>0$；

(2) $\forall x\in(3,+\infty)$，$f(x)=x^2-4x-2>0$；

(3) $\exists a\in \mathbf{Z}$，$a^2=3a-2$；

(4) $\exists a\geqslant 3$，$a^2=3a-2$；

(5) 设 A，B，C 是平面上不在同一直线上的三点，在平面上存在某个点 P，使得 $PA=PB=PC$.

证 (1) $\because$ $f(x)=x^2-4x-2$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore$ 对 $(5,+\infty)$ 内的每个 x，$f(x)>f(5)>0$. 因此(1)是真命题.

你能总结出判断含有量词的命题的真假的一般方法吗？

(2) $4\in(3,+\infty)$，但 $f(4)=-2<0$. 因此 (2) 是假命题.

(3) 1 是整数且 $1^2=3\times1-2$，因此 (3) 是真命题.

(4) $\because$ $a^2=3a-2$ 只有两个实数根 $a=1$ 或 $a=2$，$\therefore$ 当 $a\geqslant 3$ 时，$a^2\neq 3a-2$. 因此(4)是假命题.

(5) A，B，C 三点构成一个三角形，三角形总有外接圆，设 P 是 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心，则 $PA=PB=PC$. 因此(5)是真命题.

如何对含有量词的命题进行否定？先看下面两个例子：

(1) p：这个篮子里的鸡蛋都是好的，p'：这个篮子里有一个坏鸡蛋.

(2) q：$\exists x\in \mathbf{R}$ 使得 $x^2-3x-5=0$，q'：$\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2-3x-5\neq 0$.

p 是真命题当且仅当 p' 是假命题. 同样，q 是真命题当且仅当 q' 是假命题. 因此，p' 和 q' 分别是命题 p 和 q 的否定，即 $p'=\neg p$，$q'=\neg q$. 利用数学符号可以把对含有量词的命题的否定抽象地表示为"$\neg\forall=\exists\neg$"，"$\neg\exists=\forall\neg$".

你能总结出对含有量词的命题作否定的方法吗？

例 3 对下面含有量词的命题作否定：

(1) p：我们班上有某个同学的身高超过 1.85 m；

(2) q：任意有理数都可以写成两个整数之商.

解 (1) 是含有存在量词的命题，利用"$\neg\exists=\forall\neg$"得 $\neg p$：

我们班上每一个同学的身高都不超过 1.85 m.

（2）是含有全称量词的命题. 利用“$\neg\forall=\exists\neg$”得$\neg q$：存在某个有理数它不能写成两个整数之商.

练　习

1. 指出下列命题中使用了什么量词及量词的作用范围，并把量词用相应的数学符号取代：

（1）对区间 $(0,\pi)$ 内的任意实数 x，$\sin x>0$；

（2）对某个有理数 x，$x^2=\frac{1}{2}$.

2. 判断下列命题的真假：

（1）$\exists x\in\mathbf{Z}$，$x^2=2$；

（2）$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2=2$.

3. 对下面含有量词的命题作否定：

（1）某些实数是有理数；

（2）我们班上每个同学都是男生.

习题 5

学而时习之

1. 对下面含有量词的命题作否定：

（1）每个人的寿命都是有限的；

（2）存在某个整数 a 使得 $a^2=a$.

2. 判断下列命题的真假：

（1）$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-3x+2=0$；

（2）平面上存在一条直线是函数 $y=\sin x$ 的图象的对称轴.

温故而知新

3．判断下列命题的真假，并给出证明：

（1）对任意满足不等式 $3x+2>0$ 的实数 x，$2x^2-x>0$；

（2）对任意满足不等式 $3x+2>0$ 的整数 x，$2x^2-x>0$；

（3）存在某个正整数 a 使得函数 $y=\log_a x$ 的图象过点 $(3, 2)$；

（4）存在某个正实数 a 使得函数 $y=\log_a x$ 的图象过点 $(3, 2)$；

（5）已知两点 A，B，存在某个平面 α 使得平面 α 上的任意一点到 A、B 两点的距离相等；

（6）任意两个角对应相等的两个三角形必全等．

4．对下面含有量词的命题作否定：

（1）已知直线 l，过直线 l 外的任意一点可以而且只可以作一条直线与已知直线 l 平行；

（2）任意实数都可以写成平方和的形式；

（3）每个大学生都是既年轻又好学．

小结与复习

一、指导思想

无论是进行思考，同他人交流，还是从事各项工作，都需要正确地运用逻辑用语表达自己的思想．在学习数学的过程中，学习常用逻辑用语可以更深刻地理解数学内容，更严密地进行数学推理以及更正确地表达数学思想．

二、内容提要

1．命题的四种形式：如果用 p 和 q 分别表示命题的条件和结论，$\neg p$ 和 $\neg q$ 表示 p 和 q 的否定，那么命题的四种形式是：

原命题　若 p 则 q；

逆命题　若 q 则 p；

否命题　若 $\neg p$ 则 $\neg q$；

逆否命题　若 $\neg q$ 则 $\neg p$．

2．充分条件、必要条件、充要条件．

如果已知 $p \Rightarrow q$，那么 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件．

如果已知 $p \Leftrightarrow q$，那么 p 是 q 的充要条件．

3．逻辑联结词"非"、"且"、"或"．

p 是真命题 $\Leftrightarrow \neg p$ 是假命题；

$p \wedge q$ 是真命题 $\Leftrightarrow p$ 和 q 都是真命题；

$p \vee q$ 是真命题 $\Leftrightarrow p$ 和 q 中至少有一个是真命题．

4．全称量词和存在量词．

含有全称量词的命题是真命题必须考虑所有的情况；

含有存在量词的命题是真命题只须考虑某一种情况；

对含有全称量词和存在量词的命题作否定，可以用数学符号抽

象地表示为“$\neg\forall=\exists\neg$”、“$\neg\exists=\forall\neg$”.

三、学习要求和需要注意的问题

1. 学习要求：

(1) 能写出命题的逆命题、否命题和逆否命题；

(2) 理解充分条件、必要条件和充要条件的意义以及它们在数学论证中的作用；

(3) 了解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义，能正确地使用它们；

(4) 了解全称量词和存在量词的意义；

(5) 能正确地对含有一个量词的命题作否定.

2. 需要注意的问题：

(1) 命题的否命题和命题的否定是两个不同的概念；

(2) 充分性的证明是从条件推出结论，必要性的证明是从结论推出条件；

(3) 逻辑联结词“且”和“或”有很大的区别；

(4) 对含有一个量词的命题进行否定，不但量词要转换而且要对量词后面的命题作否定.

四、参考例题

例1 写出命题“p：每个有理数都是实数”的否命题及其否定.

解 p的否定$\neg p$可以写成“存在某个有理数，它不是实数”或者“并非每个有理数都是实数”.

分析p的条件和结论，条件：a是有理数；结论：a是实数.因此，p的否命题是“若a不是有理数，则a不是实数”.

例2 “$x^2\neq y^2$是$x\neq y$或$x\neq -y$的充要条件”的说法是否正确？若不正确，如何修改结论使说法正确？

解 不正确．$x^2\neq y^2\Rightarrow x\neq y$或$x\neq -y$虽然成立，但$x\neq y$或$x\neq -y$推不出$x^2\neq y^2$．这是因为$x=2$，$y=-2$时，$x\neq y$成立，

因此 $x\neq y$ 或 $x\neq -y$ 为真命题，但 $x^2\neq y^2$ 为假命题，只有当 $x\neq y$，$x\neq -y$ 同时为真时，$x^2\neq y^2$ 才为真．因此，正确的说法是"$x^2\neq y^2$ 是 $x\neq y$ 且 $x\neq -y$ 的充要条件"．

例 3 对命题"p：任意函数的图象都有且仅有一条对称轴"作否定．

解 "有且仅有一条对称轴"的否定是"没有对称轴或有一条以上的对称轴"，因此，$\neg p$：存在某个函数，它的图象或者没有对称轴或者有一条以上的对称轴．

复习题一

学而时习之

1．写出下列命题的四种形式，并判断真假：

（1）每个偶数都可以被 4 整除；

（2）每个能被写成两个奇数之和的整数都是偶数；

（3）设 E，F 是 $\triangle ABC$ 的边 AB，AC 上的点，若 E，F 是 AB，AC 的中点，则 $EF\parallel BC$；

（4）设 A，B 是两个集合，若 $A\cup B=B$，则 $A\subseteq B$．

2．设 a，$b\in\mathbf{R}$，下面左边的式子和右边的式子中哪些是可以互为充要条件的：

（1）$ab=0$；　　　　（2）$a^2+b^2=0$；

（3）$a^2+b^2>0$；　　　　（4）$a=0$ 或 $b=0$；

（5）$a=0$ 且 $b=0$；　　　　（6）$a\neq 0$ 或 $b\neq 0$．

3．作下列命题的否定：

（1）若 $x=5$，$y=3$，则 $x>y$；

（2）$\forall m>0$，方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根；

（3）$\exists m>0$，方程 $x^2+x+m=0$ 有实数根．

温故而知新

4．写出命题“若 a，b 是偶数，则 $a+b$ 是偶数”的逆否命题．

5．写出命题“6是偶数且是3的倍数”的否定．

6．试举出一个命题的例子，使得它的四种形式的命题：

(1) 都是真命题；

(2) 都是假命题．

7．试证：“a，b 都是整数”是“方程 $x^2+ax+b=0$ 有且仅有整数解”的必要不充分条件．

8．判断下列说法是否正确．若不正确，如何修改结论使之正确？

(1) “$|x|=3$”的充要条件是“$x=3$ 或 $x=-3$”；

(2) “$|x|\neq 3$”的充要条件是“$x\neq 3$ 或 $x\neq -3$”．

9．求方程 $3x^2-10x+a=0$ 有两个同号且不相等实根的充要条件．

10．判断下列命题的真假，并给出证明：

(1) $\forall x\in \mathbf{R}$，$\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}\neq a$，其中 $-2<a<2$；

(2) 存在某个边长为1的菱形使得它的面积等于边长为2的正三角形的面积．

上下而求索

11．设 $x\in \mathbf{R}$．p：$x>2$ 是假命题，q：$x<3$ 是假命题，$p\vee q$：x 是实数是真命题．但当 p，q 为假命题时，$p\vee q$ 也应为假命题．问题出在哪里呢？试说出你的看法．

第 2 章

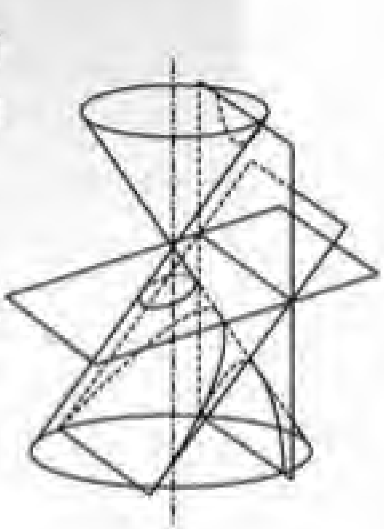
圆锥曲线与方程

平面截锥曲线三，
有开有闭各飞天，
行星绕日椭圆轨，
抛物双曲不复还。

圆、椭圆、抛物线、双曲线都可以由平面截圆锥得到，它们统称为圆锥曲线。

天上地下，圆锥曲线无处不在。

方程是研究圆锥曲线的重要工具，圆锥曲线的方程都是二次方程。



数学实验

生活中的圆锥曲线

一、实验内容和步骤

实验1 观察圆柱形的茶杯.

(1) 从茶杯的正上方观察它的上沿（也就是圆柱的上底面），是什么形状？

(2) 将茶杯放在桌面上，坐在桌子旁边观察茶杯的上沿，是什么形状？

实验2 将圆柱形茶杯装一些水（不要装满），拿在手上，观察水面的形状.

(1) 当杯底和上沿都在水平方向时，水面是什么形状？

(2) 将茶杯倾斜，观察水面变成什么形状.

实验3 将圆柱形的茶杯换成圆台形（上底半径大，下底半径小）的饮料杯.

(1) 将饮料杯装一些水，杯的上沿和底面成水平方向时，以及逐渐倾斜时，观察水面的形状的变化.

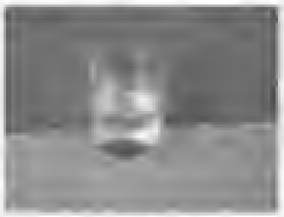
(2) 将洗脸盆装上水，将饮料杯泡在水中，使水面与杯外壁的曲面相交，观察相交所成的曲线的形状. 改变饮料杯对于水面的倾斜程度，观察所得曲线形状的变化情况.

实验4 将手电筒光照到平坦的墙面或地面上，观察照亮的区域边沿的形状. 当手电筒光正对墙面或地面时，照亮的区域的边沿是圆. 让手电筒光逐渐倾斜，观察照亮的区域边沿形状的变化.

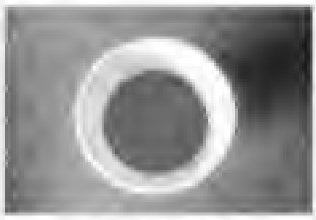
实验5 宾馆或家庭墙上的壁灯，中间是一个发光的灯泡，用一个圆台形的灯罩罩起来. 灯泡发出的光从灯罩上边和下边的圆口照射出来，在墙上照亮两块区域，观察区域边沿的曲线形状.

实验6 观察：在体育场上掷出的铅球、投出的篮球在空中自由运动时所走的路线是什么形状？喷水池中喷出的水柱是什么形状？

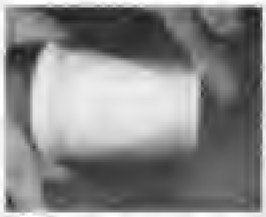
二、实验结果

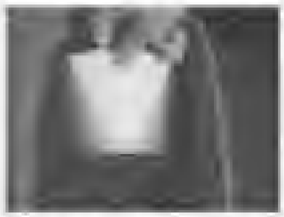

实验1(2)


实验2(2)


实验3(1)-1


实验3(1)-2


实验3(2)-1


实验3(2)-2


实验4-1


实验4-2


实验4-3


实验4-4


实验5


实验6

图2-1 生活中的圆锥曲线

三、对实验结果的分析

实验1 茶杯的上沿是圆形，从茶杯正上方观察到的也是圆，

但是当茶杯平放在桌面上，坐在桌子旁边观察茶杯上沿时，看到的却不是圆，而像是一个横向不变、纵向被压缩得到的“扁圆”，我们称它为椭圆．

实验2 将茶杯水平放置时，水面边沿是一个圆．将茶杯倾斜，在水面上沿倾斜方向的长度都扩大了同一个倍数，而与之垂直的方向的长度不变．圆被拉长成为椭圆．

茶杯的内侧面是圆柱面的一部分．在重力作用下平衡的水面是平面．因此，茶杯中的水面边沿实际上是圆柱面与平面相交得到的曲线．将茶杯倾斜，实际上就是让圆柱面与平面以不同的角度相交，得到“拉长程度”不同的椭圆．

实验3 饮料杯中装水时，观察到的结果与实验2类似，水面边沿仍是圆或椭圆．圆台形饮料杯的内侧面是圆锥面的一部分．水面边沿实际上是圆锥面与水平面的交线．

饮料杯的外侧面也是圆锥面的一部分．将饮料杯泡在水里，圆锥面的旋转轴与平面的交角可以更小，以至于相交得到的曲线不是封闭曲线，而是抛物线或双曲线．

实验4和实验5

手电筒光束的边沿是圆锥面，壁灯灯泡从灯罩口漏出来的光束的边沿也是圆锥面．墙面是平面．因此，光束在墙上照亮区域的边沿仍是圆锥面与平面的交线．

实验3、4、5的设备和内容虽然不同，但实质上却是相同的：都是观察圆锥面与平面的交线．

实验中可以观察到如下曲线：圆，椭圆，抛物线，双曲线的一支．

宾馆的壁灯的灯罩通常是圆台形（上底半径小，下底半径大），从灯罩中透出的光束在墙上照亮的区域边界是两条不同的双曲线．如果特制一个圆柱形的灯罩，将灯泡固定在灯罩的中心位置，则透出的光束在墙上照亮的区域边界上下对称，是双曲线的两支．

实验6 投出的铅球、篮球的轨道形状都是抛物线．喷出的水柱也是抛物线形状．

2.1 椭圆

2.1.1 椭圆的定义与标准方程

实验 在平坦的纸面上钉两个大头针，分别位于点 F_1，F_2。将一条足够长的细线的两端连接起来做一个圈，使得做成的圈的周长 p 大于 $2|F_1F_2|$，因而可以将两个大头针圈起来，并且还有余地. 用铅笔尖在任何一个位置 P 将细线圈绷紧，成为一个三角形 PF_1F_2. 将铅笔尖沿着细线圈移动，移动过程中也始终使细线圈绷紧. 观察铅笔尖在移动过程中在纸面上画出的细线形状，如图 2－2.

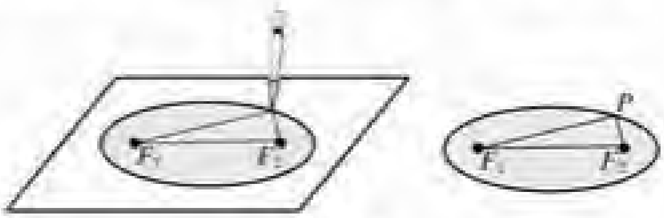


图 2－2

观察发现铅笔尖所画曲线就是我们在实验中所观察到的椭圆. 铅笔尖的位置 P 在移动过程中到两点 F_1，F_2 的距离之和 $|PF_1|+|PF_2|$ 始终等于 $p-|F_1F_2|$，保持不变. 我们根据这个几何性质来定义椭圆.

到两个定点 F_1，F_2 的距离之和为固定值(大于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹是椭圆 (ellipse). 这两个定点叫作椭圆的焦点 (focus)，两个焦点之间的距离称为焦距 (focal length).

在平面上可以建立直角坐标系，以 F_1F_2 的中点为原点，以 $\overrightarrow{F_1F_2}$ 的方向为 x 轴的正方向. 设焦距 $|F_1F_2|=2c>0$，则两焦点的坐标分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$.

例 1 设平面上建立了直角坐标系使两焦点在 x 轴上并且关于原点对称，坐标分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，其中 $c>0$，如图 2－3 所示. 设椭圆是到 F_1，F_2 两点距离之和为固定值 $2a$ 的点的轨迹，

$2a>2c$，求椭圆的方程.

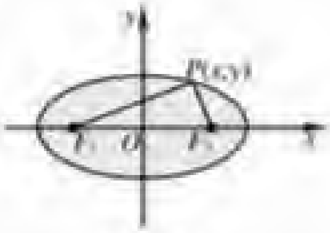


图 2-3

解 平面上任一点 $P(x,y)$ 在椭圆上的充分必要条件为 $|PF_1|+|PF_2|=2a$.

由于 $|PF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，$|PF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，$(x,y)$ 所满足的条件为

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

即 $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

两边平方得 $(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$.

整理得 $a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$.

两边再平方得 $a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$.

再整理得 $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$. ①

这就是椭圆的方程.

例 1 中求出的椭圆方程①可以写成更简单的形式.

由椭圆的定义知 $2a>2c$，$a>c$，故 $a^2-c^2>0$.

在①中令 $y=0$，得 $x^2=a^2$，$x=\pm a$，也就是说椭圆与 x 轴的交点为 $(-a,0)$ 及 $(a,0)$. 再在①中令 $x=0$，得 $y=\pm\sqrt{a^2-c^2}$. 记 $b=\sqrt{a^2-c^2}$，则椭圆与 y 轴的交点为 $(0,-b)$，$(0,b)$，椭圆的方程①变为

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

还可以进一步写成容易记忆的形式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad ②$$

这称为椭圆的标准方程（standard equation），其中 $a>b>0$.

如果椭圆的两个焦点在 y 轴上，关于原点对称，坐标分别为 $F_2(0,c)$、$F_1(0,-c)$，其中 $c>0$，如图 2－4 所示，椭圆上任意一点到两焦点的距离之和为 $2a(a>c)$，则椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad ③$$

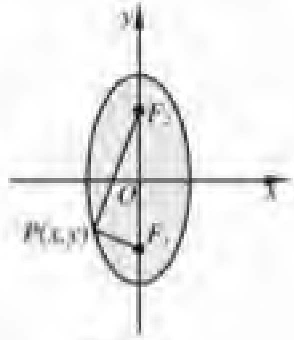


图 2－4

这也是椭圆的标准方程.

例 2 求下列椭圆的焦点坐标，以及椭圆上每一点到两焦点距离的和.

(1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

(2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$；

(3) $4x^2+3y^2=4$.

解 (1) 椭圆方程具有标准形式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其中 $a=2$，$b=1$. 因此 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$. 两焦点坐标为 $(-\sqrt{3},0)$、$(\sqrt{3},0)$. 椭圆上每一点到两焦点的距离之和为 $2a=4$.

(2) 椭圆方程具有标准形式 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$，其中 $a=\sqrt{5}$，$b=2$. 因此 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5-4}=1$. 两焦点坐标为 $(0,-1)$、$(0,1)$. 椭圆上每一点到两焦点的距离之和为 $2a=2\sqrt{5}$.

(3) 将方程两边同除以 4，化为 $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{4}{3}}=1$，具有标准形式 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$，其中 $a=\sqrt{\frac{4}{3}}$，$b=1$. 因此 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\frac{4}{3}-1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 两焦点坐标为 $\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$、$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. 椭圆上每一点到两焦点的距离之和为 $2a=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

例 3 求下列椭圆的方程.

(1) 焦点在$(-3,0)$和$(3,0)$，椭圆上每点到两个焦点的距离之和为10.

(2) 焦点在$(0,-2)$和$(0,2)$，椭圆经过点$(3,2)$.

解 (1) 椭圆具有标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 已知$c=3$，$2a=10$，故$a=5$，$b^2=a^2-c^2=5^2-3^2=16$. 所求方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

(2) 椭圆具有标准方程$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$. 已知$c=2$，椭圆上一点$(3, 2)$到两焦点的距离之和为

$$\sqrt{(3-0)^2+[2-(-2)]^2}+\sqrt{(3-0)^2+(2-2)^2}=5+3=8.$$

故$2a=8$，$a=4$，$b^2=a^2-c^2=16-4=12$. 所求方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$.

练　习

1. 求下列椭圆的焦点坐标，并画出草图.

   (1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$；　　(2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$；　　(3) $9x^2+y^2=9$.

2. 求满足下列条件的椭圆方程.

   (1) 两焦点坐标分别为$F_1(-2, 0)$，$F_2(2, 0)$，$2a=6$；

   (2) 两焦点坐标分别为$F_1(0, -3)$，$F_2(0, 3)$，且过点$(8, 3)$.

2.1.2 椭圆的简单几何性质

实验 选取几组不同的$a>b>0$，做如下实验.

(1) 描点画图或利用计算机画图软件画出如下方程的图象：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1；\quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

(2) 观察这些图象的如下性质：

范围：分布范围是否有限？如果有限，最左、最右、最高、最低分别到什么位置？找出最左、最右、最高、最低的点.

对称性：图象是不是中心对称图形？如果是，找出对称中心. 是不是轴对称图形？如果是，找出对称轴.

(3) 通过观察，你是否发现图象还有其他性质？如果有，试作出说明.

(4) 想一想，能否根据方程解释你所观察到的现象.

下面通过椭圆的方程讨论它的一些简单而基本的性质.

一、范 围

如图2－5所示，我们来看图象上的点的横坐标、纵坐标的取值范围，也就是方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的解$(x,y)$中的$x$，$y$值的取值范围.

将x当作已知数，从方程中解出y得

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

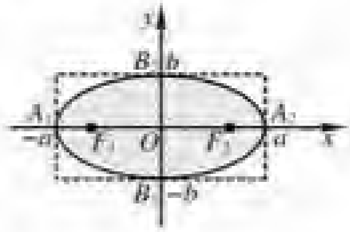


图2－5

要求出实数值y，横坐标x满足的充分必要条件是$a^2-x^2\geqslant 0$，即$|x|\leqslant a$，$-a\leqslant x\leqslant a$. 因此，x的取值范围为$[-a,a]$.

同理，将y当作已知数，从椭圆方程中解出x得

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}.$$

要求出实数值x，y满足的充分必要条件是$b^2-y^2\geqslant 0$. 即$-b\leqslant y\leqslant b$，y的取值范围为$[-b,b]$.

因此，椭圆上的点(x,y)都被限制在$x\in[-a,a]$，$y\in[-b,b]$的范围内，这个范围是由四条直线$x=-a$，$x=a$，$y=-b$、$y=b$所围成的一个矩形，椭圆就在这个矩形内.

让x取最小值$-a$，求出$y=0$. 因此椭圆最左边的点为$(-a,0)$.

让x取最大值a，求出$y=0$. 因此椭圆最右边的点为$(a,0)$.

让 y 取最小值 $-b$ 和最大值 b 都求得 $x=0$，由此得到椭圆最高点为 $(0, b)$，最低点为 $(0, -b)$.

同理可知椭圆 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 被限制在 $x\in[-b,b]$ 且 $y\in[-a,a]$ 的范围内，这个范围是由直线 $x=-b$、$x=b$、$y=-a$、$y=a$ 围成的矩形. 这个椭圆最左、最右、最低、最高点分别是 $(-b, 0)$、$(b, 0)$、$(0, -a)$、$(0, a)$.

二、对称性

1. 对称中心.

平面上任一点 (x,y) 关于原点的对称点是 $(-x,-y)$.

在椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ 和 } \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

中将 (x,y) 换成 $(-x,-y)$，椭圆方程不变，这说明了：

点 (x,y) 在椭圆上 $\Rightarrow$ 它关于原点的中心对称点 $(-x,-y)$ 也在椭圆上.

因此，这两个椭圆都是以原点为对称中心的中心对称图形，原点是它们的对称中心.

所说的两个方程都是以两个焦点的连线的中点为原点建立的直角坐标系下的方程. 对于平面上任意一个椭圆，它的两个焦点连成的线段中点是椭圆的对称中心，称为这个椭圆的中心（center）.

2. 对称轴.

平面上每个点 (x,y) 关于 x 轴的对称点是 $(x,-y)$. 在椭圆的标准方程中将 (x,y) 换成 $(x,-y)$，方程不变. 这说明椭圆是轴对称图形，x 轴是它的对称轴.

平面上每个点 (x,y) 关于 y 轴的对称点是 $(-x,y)$. 在椭圆方程中将 (x,y) 换成 $(-x,y)$，方程不变. 这说明 y 轴也是它的对称轴.

椭圆的标准方程是以两焦点连成的线段的中点为原点，以两焦点连线为 x 轴或 y 轴得到的. 因此，平面上任意一个椭圆都是轴对称图形，两焦点连线是它的对称轴，过椭圆中心、与两焦点连线垂直的

直线也是对称轴.

3. 顶点.

椭圆的两条对称轴与椭圆相交，共有四个交点，都称为椭圆的顶点(vertex). 比如，椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的四个顶点是 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，$B_1(0,-b)$，$B_2(0,b)$，分别是这个椭圆最左、最右、最低、最高的点.

我们知道，经过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两个焦点的直线 F_1F_2 是椭圆的一条对称轴，设它与椭圆相交得到的两个顶点是 A_1，A_2，这两个顶点之间的线段 A_1A_2 称为这个椭圆的长轴(major axis)，它的长度等于 $2a$. 椭圆的中心 O 将长轴分成两条长度相等的线段 OA_1，OA_2，都叫作长半轴 (major half axis)，长半轴的长度等于 a.

我们知道，椭圆可以由圆沿某一方向"压扁"得到，经过这样的压缩之后，圆的每条半径变成连接椭圆中心与椭圆上的一点的线段，其中最长的就是长半轴，最短的就是短半轴. 圆的大小由半径决定，椭圆的形状和大小由长半轴长 a 和短半轴长 b 决定.

过椭圆的中心并且与长轴垂直的直线是椭圆的另一条对称轴，它与椭圆相交得到另外两个顶点 B_1，B_2. 这两个顶点之间的线段 B_1B_2 称为这个椭圆的短轴(minor axis)，它的长度等于 $2b$. 椭圆的中心将短轴分成两条长度相等的线段 OB_1，OB_2，都叫作短半轴 (minor half axis)，短半轴的长度等于 b.

例 1 叙述下列方程的图象的形状和位置，并说出图象的分布范围.

(1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$；　　(2) $9x^2+4y^2=1$；

(3) $4x^2+4y^2=1$.

解 (1) 这是椭圆的标准方程，图象是椭圆.

中心在原点，长轴在 x 轴上，长为 6，短轴在 y 轴上，长为 4.

图象在直线 $x=\pm 3$，$y=\pm 2$ 所围的矩形内.

(2) 方程具有标准形式$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$，图象是椭圆.

中心在原点，长轴在 y 轴上，长为 1，短轴在 x 轴上，长为$\frac{2}{3}$.

图象在直线 $x=\pm\frac{1}{3}$，$y=\pm\frac{1}{2}$所围的矩形内.

(3) 方程可写为 $x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$，是圆的标准方程. 图象是以原点为圆心、半径为$\frac{1}{2}$的圆.

图象在直线 $x=\pm\frac{1}{2}$，$y=\pm\frac{1}{2}$所围的正方形内.

例 2 过两点 $P_1(2,2)$，$P_2(-3,-1)$作一个椭圆，使它的中心在原点，焦点在 x 轴上. 求椭圆的方程，以及椭圆的长半轴、短半轴的长度.

解 椭圆方程具有标准形式$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 将两已知点坐标代入得

$$\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1, \qquad ①$$

$$\frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1. \qquad ②$$

将$\frac{1}{a^2}$，$\frac{1}{b^2}$看作未知数，则这两个式子组成二元一次方程组.

②×4−①得 $\frac{32}{a^2}=3$，即$\frac{1}{a^2}=\frac{3}{32}$.

$$\frac{1}{b^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{a^2}=\frac{1}{4}-\frac{3}{32}=\frac{5}{32}.$$

故椭圆方程为$\frac{3}{32}x^2+\frac{5}{32}y^2=1$.

长半轴长 $a=\sqrt{\frac{32}{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{6}$，短半轴长 $b=\sqrt{\frac{32}{5}}=\frac{4}{5}\sqrt{10}$.

例 3 对不同的实数值 m，讨论直线 $y=x+m$ 与椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的位置关系.

解 直线与椭圆的公共点的坐标就是下面的方程组的解：

$$\begin{cases} y=x+m, & ③ \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1. & ④ \end{cases}$$

将③代入④得

$$\frac{x^2}{4}+(x+m)^2=1.$$

整理得

$$5x^2+8mx+4m^2-4=0. \qquad ⑤$$

此方程的实数解的个数由它的判别式 Δ 决定.

$$\Delta=(8m)^2-4\times5(4m^2-4)=16(5-m^2).$$

当 $-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$ 时 $\Delta>0$，方程⑤有两个不同的实数根，代入③可得到两个不同的公共点坐标．此时直线与椭圆有两个公共点，它们相交.

想一想，算一算，任意一条直线与椭圆的位置关系是否总是上述三种不同的情况?

当 $m=-\sqrt{5}$ 或 $m=\sqrt{5}$ 时 $\Delta=0$，方程⑤有两个相等的实数根，代入③得到一个公共点坐标．此时直线与椭圆有一个公共点，从图象上观察到它们在这一点相切.

当 $m<-\sqrt{5}$ 或 $m>\sqrt{5}$ 时 $\Delta<0$，方程⑤没有实数根，直线与椭圆没有公共点.

练 习

1．指出下列各椭圆的中心、焦点坐标、顶点坐标、长轴长、短半轴长.

(1) $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{9}=1$；　　(2) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$；

(3) $4x^2+9y^2=1$.

2．试判断直线 $y=mx+1$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的交点的个数，并说明理由.

习题 1

学而时习之

1．判断下列方程是否表示椭圆，若是，指出该椭圆的焦点坐标.

(1) $2x^2+y^2=1$；　　(2) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=4$；

(3) $2x^2+3y^2=6$；　　　　(4) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=1$.

2. 求下列椭圆的焦点坐标，并画出简图.

(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；　　　　(2) $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{16}=1$；

(3) $4x^2+y^2=1$.

3. 已知椭圆的中心在原点，对称轴为坐标轴，并满足下列条件，求它们的方程.

(1) $a=\sqrt{2}$，$b=1$；

(2) $a=3$，$c=1$；

(3) 焦点为 $F_1(-2,0)$，长轴长为 6；

(4) 焦点为 $F_1(0,-3)$，短半轴长为 8；

(5) 经过两点 $A\left(1,\frac{3}{2}\right)$，$B(2,0)$；

(6) 经过两点 $P\left(\frac{3}{5},-4\right)$，$Q\left(-\frac{4}{5},3\right)$.

温故而知新

4. 已知椭圆方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过左焦点 F_1 的直线交椭圆于 A，B 两点. 求三角形 ABF_2 的周长.

5. $\triangle ABC$ 的周长为 18，A，B 两点的坐标分别为 $A(-4,0)$，$B(4,0)$. 求点 C 的轨迹方程.

6. 已知点 $(4,2)$ 是直线 l 被椭圆 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ 所截得的线段的中点. 求直线 l 的方程.

7. 已知地球运行的轨道是椭圆，太阳在这个椭圆的一个焦点上. 这个椭圆的长半轴长 $a=1.50\times10^8$ km，半焦距与长半轴长之比 $\frac{c}{a}=0.0192$. 求地球到太阳的最大和最小距离.

2.2 双曲线

2.2.1 双曲线的定义与标准方程

我们知道，到两个定点距离之和为定值的点的轨迹是椭圆．很自然想到，到两点距离之差为定值的点的轨迹是什么曲线呢？

先通过实验将这样的曲线画出来，观察它们的形状．

实验 任给两个定点 F_1，F_2 以及固定的长度 $2a>0$．设计适当的方法或装置画出到 F_1 和 F_2 的距离之差等于 d 的点的轨迹．观察轨迹的形状．

注意：我们希望点的轨迹是一条曲线，至少应有直线 F_1F_2 之外的点 P，在$\triangle PF_1F_2$ 中应当有 $|PF_1|-|PF_2|<|F_1F_2|$ 即$2a<2c$，故应有 $a<c$．

方法 1 描点作图：如图 2－6 所示先作满足条件 $|PF_1|-|PF_2|=2a$ 的点 P 的轨迹．

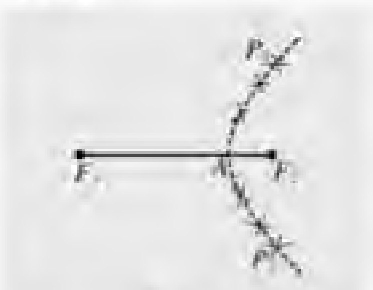


图 2－6

设 $|F_1F_2|=2c$．先在线段 F_1F_2 上找出轨迹上的点 A．由 $|F_1A|+|AF_2|=2c$ 及 $|F_1A|-|AF_2|=2a$ 可解出 $|AF_2|=\frac{2c-2a}{2}=c-a$，由此可在 F_1F_2 上作出 A．

以 F_2 为圆心、适当的长度 $d>0$ 为半径画圆弧，再以 F_1 为圆心、$2a+d$ 为半径画圆弧．所谓“适当的长度 d”，就是要使上述两弧相交，也就是 $2a+d+d>2c$ 即 $d>c-a$．设交点为 P_1，P_2，则 P_1，P_2 都是轨迹上的点．

选择不同的长度 $d>c-a$，作出轨迹上一系列点，依次连成光滑曲线，即得轨迹的一部分的近似形状.

同样的方法可以画出满足条件 $|PF_2|-|PF_1|=2a$ 的点的轨迹.

方法 2 如图 2－7 所示，取一条拉链，拉开一部分，在拉链的一

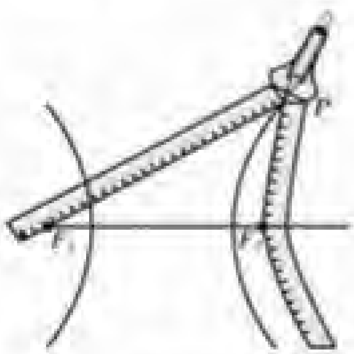


图 2－7

边上取定一点 E_1，设 E_1' 是另一边上在拉链拉开之前与 E_1 重合的点，在 E_1' 所在那一边上取点 E_2 使 E_2 比 E_1 更接近拉链头，并且 $|E_2E_1'|=2a$，用大头针将 E_1，E_2 分别固定在画图纸上的点 F_1，F_2，将铅笔尖放在拉链张开处 P 将拉链绷紧，则 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，随着拉链的拉开，铅笔尖画出的曲线就是所求轨迹的一部分.

同理可以画出满足条件 $|PF_2|-|PF_1|=2a$ 的点的轨迹.

观察发现，以上画出来的曲线形状像是初中数学中学过的反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象——双曲线.

平面上到两个固定点 F_1，F_2 的距离的差的绝对值等于固定值（小于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹叫作双曲线（hyperbola），两个固定点 F_1，F_2 称为双曲线的焦点，两个焦点之间的距离叫作双曲线的焦距.

双曲线由两条曲线组成：其中一条是满足条件 $|PF_1|-|PF_2|=2a$ 的点 P 的轨迹；另一条是满足条件 $|PF_2|-|PF_1|=2a$ 的点 P 的轨迹. 两条曲线互不相连，其中每一条叫作双曲线的一支. 双曲线由这两支共同组成.

例 1 如图 2－8 所示建立适当的坐标系，求双曲线的方程.

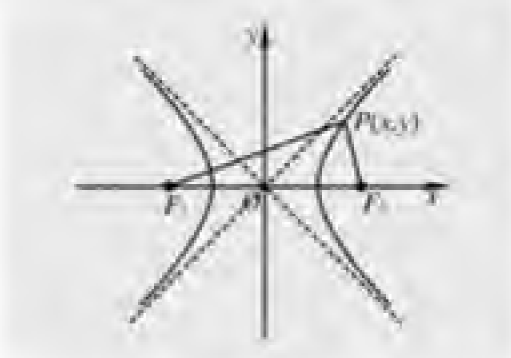


图 2-8

解 以 F_1F_2 的中点 O 为原点、$\overrightarrow{OF_2}$ 的方向为 x 轴正方向建立直角坐标系. 则两个焦点的坐标分别是 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$.

轨迹上的点 $P(x,y)$ 满足的充分必要条件是

$$|PF_1|-|PF_2|=\pm 2a.$$

即 $$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a.$$

两边平方得 $$(x+c)^2+y^2=(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a)^2.$$

整理得 $$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

两边再平方得 $$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2.$$

再整理得 $$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2). \quad ①$$

这就是双曲线的方程.

例 1 中求出的方程①可以化为更简单的形式.

由双曲线的定义知 $2a=||PF_1|-|PF_2||<|F_1F_2|=2c$，$a<c$，故可令 $b=\sqrt{c^2-a^2}$，方程①变为

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2.$$

还可以进一步写成容易记忆的形式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ②$$

这称为双曲线的标准方程，其中 $a>0$，$b>0$. 它表示的双曲线的焦点在 x 轴上，坐标分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$c=\sqrt{a^2+b^2}$，而双曲线上的点到两个焦点的距离之差的绝对值等于 $2a$.

如果双曲线的焦点在 y 轴上，坐标分别为 $F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$，双曲线上任一点到两个焦点的距离之差的绝对值等于 $2a(a<c)$，如图 2-9 所示，则双曲线的方程为

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \quad ③$$

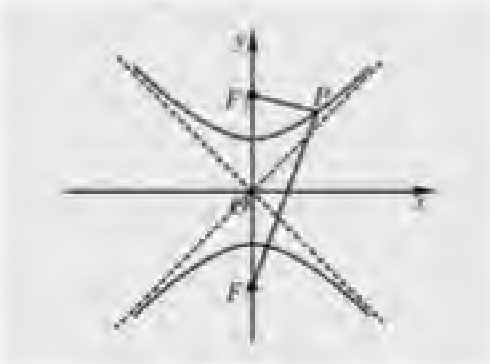


图 2-9

这也称为双曲线的标准方程.

例 2 已知双曲线的两个焦点坐标 $(-4,0)$，$(4,0)$，双曲线上任一点到两个焦点的距离之差的绝对值等于 6. 求双曲线的方程.

解 双曲线的焦点在 x 轴上，坐标分别为 $(-c,0)$，$(c,0)$，$c=4$. 故双曲线方程具有标准形式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

其中 $a=\frac{6}{2}=3$，$b^2=c^2-a^2=4^2-3^2=7$. 故双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1.$$

例 3 已知双曲线的两个焦点坐标 $(-4,0)$，$(4,0)$，并且双曲线经过点 $P(4,6)$，求双曲线的方程.

解 点 $P(4,6)$ 到两焦点 $F_1(-4,0)$，$F_2(4,0)$ 的距离之差

$$|PF_1|-|PF_2|=\sqrt{[4-(-4)]^2+(6-0)^2}-6=10-6=4.$$

也就是说 $2a=4$，$a=2$.

又 $c=4$，故 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

双曲线的标准方程具有形式$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. 将 $a=2$, $b=2\sqrt{3}$代入，就得到双曲线的方程

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1.$$

练　习

1. 求适合下列条件的双曲线的标准方程.

(1) 两焦点坐标为 $(0, -5)$, $(0, 5)$, 且 $a=4$;

(2) 两焦点坐标为 $(0, -6)$, $(0, 6)$, 且经过点 $(2, -5)$.

2. 方程$\frac{x^2}{2+m}-\frac{y^2}{m+1}=1$表示双曲线，求 m 的取值范围.

2.2.2 双曲线的简单几何性质

实验　任意选取 $a>0$, $b>0$, 用描点作图法或计算机软件作出双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的图形，如图 2-10 所示. 观察图形，研究它的如下性质：

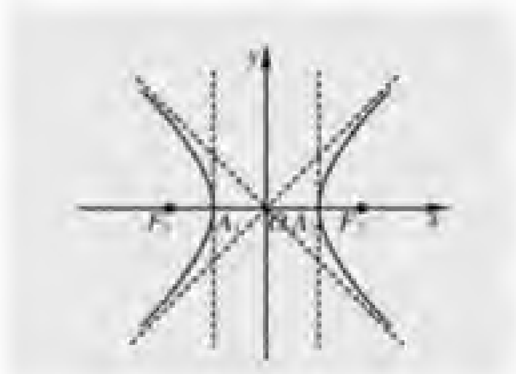


图 2-10

1. 范围：曲线是否分布在一个有限的范围之内？或者在某一个范围之外？

2. 对称性：曲线是不是中心对称图形？如果是，找出对称中心．曲线是不是轴对称图形？如果是，找出对称轴．

3．你所观察到的其他性质．

比如，当曲线无限延伸时的趋势，双曲线的一支与抛物线有什么区别．

以下通过双曲线的标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$来研究双曲线的一些简单性质．

一、范　围

将x当作已知数，从方程中解出

$$y=\pm\frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{a}. \quad ①$$

要求出实数值y，实数值x的允许范围是$|x|\geqslant a$，即$x\in(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$．双曲线的两支分别位于直线$x=-a$左侧和直线$x=a$右侧，向左、右两方无限延伸．

将y当作已知数，从方程中解出$x=\pm\frac{a\sqrt{y^2+b^2}}{b}$．$y$的允许值范围是全体实数．

由表达式①还可以更精细地描述双曲线分布的范围．双曲线上的点的坐标(x,y)满足条件

$$|y|=\frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{a}<\frac{b\sqrt{x^2}}{a}=\frac{b}{a}|x|.$$

当$x\geqslant a$时，$-\frac{b}{a}x<y<\frac{b}{a}x$；当$x\leqslant -a$时，$-\frac{b}{a}x>y>\frac{b}{a}x$．

因此，双曲线处于两条直线$y=\pm\frac{b}{a}x$所围成的包含x轴在内的那两个区域中，并且在直线$x=-a$，$x=a$所围成的区域外侧，如图2－10．

二、对称性

将(x,y)分别换成$(-x,-y)$，$(x,-y)$和$(-x,y)$，双曲线方程都不变．可见双曲线关于原点、x轴、y轴都是对称的，原点是它的对称中

心.两条坐标轴都是它的对称轴.

双曲线的对称中心称为它的中心.

三、顶点

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$与它的对称轴 x 轴有两个交点 $A_1(-a, 0)$、$A_2(a, 0)$，都称为双曲线的顶点. 这两个顶点之间的线段 A_1A_2 叫作双曲线的实轴(real axis)，长度为 $2a$. 实轴 A_1A_2 被中心 O 分成两条长度相等的线段 OA_1，OA_2，它们的长度 a 称为双曲线的实半轴长.

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$与它的另一条对称轴 y 轴没有交点. 但我们仍将这条对称轴上两点 $B_1(0,-b)$、$B_2(0,b)$之间的线段 B_1B_2 称为双曲线的虚轴(imaginary axis)，它的长度等于 $2b$，这个长度的一半 b 称为虚半轴长.

四、渐近线

我们已经知道双曲线处于两条相交直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 所围成的、包含 x 轴在内的两个区域中. 从图象上看，双曲线的两支向两端无限延伸，越来越接近这两个区域的边界直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$. 我们通过方程来研究双曲线接近这两条直线的程度.

在双曲线方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$中将 x 当作已知数，解出

$$y=\frac{\pm b\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

我们先来研究双曲线中 $x\geqslant a$ 的一支. 先来考察这支曲线向右上方接近直线 $y=\frac{b}{a}x$ 的程度. 为此，对同样的横坐标 x，计算出直线 $y=\frac{bx}{a}$与双曲线 $y=\frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{a}$上的点的纵坐标之差

$$d=\frac{bx}{a}-\frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{a}=\frac{b(x-\sqrt{x^2-a^2})}{a}$$

$$=\frac{ba^2}{a(x+\sqrt{x^2-a^2})}=\frac{ba}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

随着 x 的无限增大，分母 $x+\sqrt{x^2-a^2}$ 无限增大，分子 ba 不变，因此，d 无限接近于 0，这说明双曲线在右上方无限接近直线 $y=\frac{b}{a}x$. 同理可知，当 x 无限增大时，双曲线 $y=-\frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{a}$ 与直线 $y=-\frac{b}{a}x$ 上具有相同横坐标 x 的点无限接近，双曲线向右下方无限接近于直线 $y=-\frac{b}{a}x$.

由于双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 与直线 $y=\frac{b}{a}x$ 及 $y=-\frac{b}{a}x$ 都是以原点为中心的对称图形，由双曲线向右上方无限接近直线 $y=\frac{b}{a}x$ 知道它向左下方也无限接近这条直线. 由双曲线向右下方无限接近直线 $y=-\frac{b}{a}x$ 知道它向左上方也无限接近于这条直线.

双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 在无限延伸的过程中无限接近于两条直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$. 这两条直线称为双曲线的渐近线（asymptote）.

过实轴的两个顶点 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$ 作平行于虚轴的直线 $x=\pm a$，过虚轴的两个顶点 $B_1(0,-b)$，$B_2(0,b)$ 作平行于实轴的直线 $y=\pm b$，这四条直线围成一个矩形. 矩形的两条对角线所在的直线就是双曲线的两条渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$.

在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 和它的渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 的方程中将 x 与 y 互换就得到双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 的渐近线方程 $x=\pm\frac{b}{a}y$，即 $y=\pm\frac{a}{b}x$.

例 1 求双曲线 $4y^2-9x^2=-4$ 的实半轴长、虚半轴长、焦点坐标、渐近线方程，并画出曲线的草图.

解 两边同除以 -4，化成标准方程 $\frac{x^2}{\frac{4}{9}}-\frac{y^2}{1}=1$.

可见实半轴长 $a=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$，虚半轴长 $b=1$.

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+1}=\frac{\sqrt{13}}{3}$. 焦点坐标为 $\left(\pm\frac{\sqrt{13}}{3},\ 0\right)$.

渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，即 $y=\pm\frac{3}{2}x$.

为画出双曲线的草图，在坐标系中画出渐近线 $y=\pm\frac{3}{2}x$，顶点 $\left(\pm\frac{2}{3},\ 0\right)$. 算出双曲线在第一象限内一点的坐标，比如取 $y=1$ 算出 $x=\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx 0.94$. 可见点 $(0.94,\ \pm1)$ 在双曲线上. 将一、四象限内已知的三点 $(0.94,\ -1)$，$\left(\frac{2}{3},0\right)$，$(0.94,1)$ 依次连成光滑曲线并让它逐步接近渐近线，画出一、四象限内双曲线的一支. 由对称性可画出位于二、三象限内的另一支，如图 2－11.

图 2－11

例 2 已知双曲线的两焦点坐标 $F_1(0,\ -2)$，$F_2(0,2)$，以及双曲线上一点 P 的坐标 $(3,\ -2)$，求双曲线的方程、顶点坐标和渐近线方程.

解 $2a=|PF_2|-|PF_1|=\sqrt{(3-0)^2+(-2-2)^2}-3=5-3=2$，即 $a=1$.

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}.$$

双曲线的焦点在 y 轴上，方程具有标准形式 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$，为

$$y^2-\frac{x^2}{3}=1.$$

顶点坐标为$(0,\pm1)$，渐近线方程为 $y=\pm\frac{a}{b}x$，即 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

例3 以下方程的图象是否双曲线？如果是，求它的焦点坐标，顶点坐标和渐近线方程.

(1) $4x^2-5y^2=-20$；(2) $4x^2-5y^2=1$；(3) $4x^2-5y^2=0$.

解 (1) 将方程两边同除以-20，化为$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$. 这个方程具有形式$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$，其中 $a=2$，$b=\sqrt{5}$. 这是实轴在 y 轴上的双曲线的标准方程. 图象是双曲线. 顶点坐标为$(0,\pm2)$.

半焦距 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+5}=3$. 焦点坐标为$(0,\pm3)$.

渐近线方程是 $y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$，即 $y=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}x$.

(2) 方程具有标准形式$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，其中 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{\sqrt{5}}$. 图象是实轴在 x 轴上的双曲线. 顶点坐标为$\left(\pm\frac{1}{2},\ 0\right)$.

半焦距$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}=\frac{3}{10}\sqrt{5}$. 焦点坐标为$\left(\pm\frac{3}{10}\sqrt{5},\ 0\right)$.

渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，即 $y=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}x$.

一般地，对任意 $A, B>0$，方程 $A^2x^2-B^2y^2=0$ 的图形是两条直线 $Ax\pm By=0$，它们是双曲线 $A^2x^2-B^2y^2=C\ (C\neq0)$ 的渐近线.

(3) 方程即$(2x+\sqrt{5}y)(2x-\sqrt{5}y)=0$. 图象由两条直线 $2x+\sqrt{5}y=0$ 和 $2x-\sqrt{5}y=0$ 共同组成，不是双曲线. 这两条直线也就是 $y=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}x$，是本题 (1)、(2) 两小题中的双曲线的共同的渐近线.

例4 如图 2-12 所示，反比例函数 $y=\frac{1}{x}$的图象是双曲线，两条坐标轴是它的渐近线. 求它的实半轴长和半焦距.

解 图像的对称轴是直线 $y=x$. 对称轴与双曲线 $y=\frac{1}{x}$的交点坐标满足条件 $x=\frac{1}{x}$，可解得 $x=\pm1$. 因此两交点坐标分别为$(1,1)$，

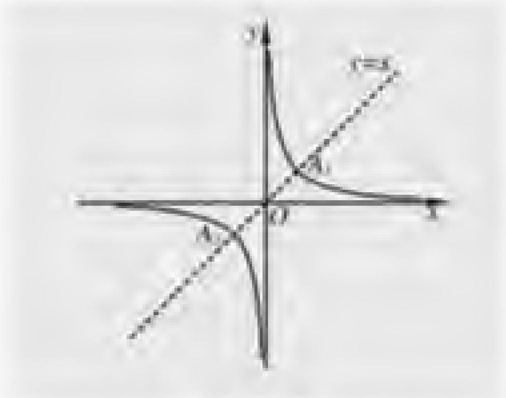


图 2-12

$(-1,-1)$，这就是双曲线的两个顶点 A_1，A_2 的坐标．两顶点的距离

$$|A_1A_2|=\sqrt{[1-(-1)]^2+[1-(-1)]^2}=2\sqrt{2},$$

因此实半轴长 $a=\frac{1}{2}|A_1A_2|=\sqrt{2}$.

图象的两条渐近线的夹角为直角，渐近线与实轴之间的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，因此

$$\frac{b}{a}=\tan\frac{\pi}{4}=1,\quad b=a=\sqrt{2},$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2+2}=2.$$

半焦距 $c=2$.

练　习

1. 指出下列双曲线的实轴长、虚半轴长、焦点坐标、渐近线方程，并画出简图．

(1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$；　　(2) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$；

(3) $x^2-y^2=1$；　　(4) $4x^2-9y^2=1$.

2. 求适合下列条件的双曲线的标准方程．

(1) $a=4$，$b=5$；

(2) $a=2\sqrt{5}$，经过点 $A(-5,2)$.

3. 试确定直线 $y=x+1$ 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 交点的个数．

习题 2

学而时习之

1. 求适合下列条件的双曲线的标准方程.

(1) 焦点在 x 轴上，$c=6$，且过点 $A(-5, 2)$；

(2) $a=12$，$b=5$；

(3) 经过两点 $A(-7, -6\sqrt{2})$，$B(\sqrt{7}, -3)$.

2. 已知 $M(-c, 0)$，$N(c, 0)$. 若 $|PM|-|PN|=c(c>0)$，则动点 P 的轨迹是（　　）

(A) 双曲线的左支　　(B) 双曲线的右支

(C) 以 N 为端点的射线　　(D) 线段 MN

3. 求适合下列条件的双曲线的标准方程.

(1) 焦点在 y 轴上，焦距为 8，渐近线斜率为 $\pm\frac{1}{3}$；

(2) 经过点 $(3, -2)$，且一条渐近线的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$；

(3) 焦点在 x 轴上，过点 $P(4\sqrt{2}, -3)$，且 $Q(0, 5)$ 与两焦点连线互相垂直；

(4) 以 $2x\pm 3y=0$ 为渐近线，且经过点 $(1, 2)$；

(5) 以椭圆 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$ 的长轴的端点为焦点，且过椭圆焦点.

温故而知新

4. 过双曲线的焦点 F_1 的直线与该双曲线的同一支相交于 A，B 两点，且 $|AB|=m$，另一焦点为 F_2，则 $\triangle ABF_2$ 的周长为（　　）

(A) $4a$　　(B) $4a-m$　　(C) $4a+2m$　　(D) $4a-2m$

5. 若双曲线 $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=1$ $(a>0, b>0)$ 和椭圆 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ $(m>n>0)$ 有共同的焦点 F_1，F_2，P 是两条曲线的一个交点，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|=$（　　）

(A) m^2-a^2　　(B) $\sqrt{m}-\sqrt{a}$　　(C) $\frac{1}{2}(m-a)$　　(D) $m-a$

6. 已知双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的两个焦点分别为$F_1$、$F_2$，点$P$在双曲线上，且$PF_1\perp PF_2$．求点$P$至$x$轴的距离．

7. 过$P(0,1)$的直线l与双曲线$x^2-\frac{y^2}{2}=1$有且仅有一个公共点．求直线l的方程．

2.3　抛物线

2.3.1　抛物线的定义与标准方程

初中学过的二次函数的图象称为抛物线．在重力作用下的平抛物体或斜抛物体（比如运动场上推出的铅球、投出的篮球、水池里喷出的水柱），它们运动的轨道都是抛物线的一部分．

怎样通过几何性质来刻画抛物线？

实验　任给一个定点F和一条直线l，设计适当的方法或装置画出到F和l距离相等的点的轨迹，观察轨迹的形状．

方法1　描点作图．如图2－13所示，作FD与l垂直相交于D，

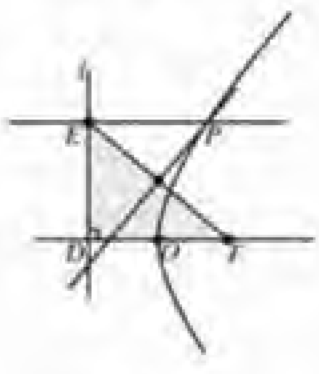


图 2－13

作FD的中点O，则O在所说轨迹上．在l上任取一点E，过E作l的垂线，与线段FE的垂直平分线交于一点P，则P在所说轨迹上．

在 l 上 D 的两侧各取一些点作为 E，按上述方法作出轨迹上一系列点 P，依次连接成光滑曲线，就得到了轨迹的大致形状.

方法2 设计装置如下（见图 2-14）：将一根直尺沿着直线 l 固定不动．在一个三角板的一条直角边上取定点 A，设三角板的直角顶点为 C．取一条细线使它的长度正好等于 AC 的长度．将这条细线的一端固定在三角板上的点 A，另一端用大头针固定在点 F．将三角板的另一条直角边紧靠直尺的边缘，与 l 重合．用铅笔靠着细线将它绷紧，使铅笔贴在三角板上 AC 之间．让三角板沿着直尺滑动，则铅笔尖所在的点 P 就画出所说的轨迹的一段.

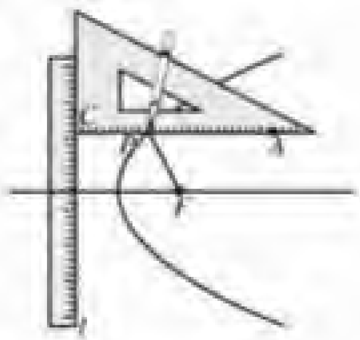


图 2-14

观察画出的轨迹的形状，发现它们好像是初中学过的二次函数的图象——抛物线．为了验证所得的轨迹形状是否与二次函数的图象相同，我们在适当的直角坐标系下列出轨迹的方程.

例1 已知定点 F，定直线 l 且 $F \notin l$．动点 P 到 F 与 l 的距离相等．在适当的直角坐标系中求动点 $P(x,y)$ 的轨迹的方程.

解 从 F 作 l 的垂线交 l 于 D．设 $p=|FD|$．取 FD 的中点 O，以 O 为原点，以 $\overrightarrow{OF}$ 为 x 轴的正方向，建立直角坐标系，如图 2-15 所示.

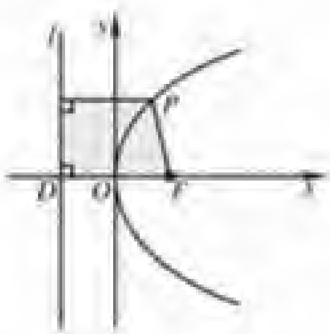


图 2-15

点 $P(x,y)$ 到 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ 的距离 $d_1=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$.

$P(x,y)$ 到 l 的距离 $d_2=\left|x+\frac{p}{2}\right|$.

$$\begin{aligned}d_1=d_2 &\Leftrightarrow \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|\\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2\\ &\Leftrightarrow x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}\\ &\Leftrightarrow y^2=2px.\end{aligned}$$

因此，所求轨迹的方程为 $y^2=2px$.

如果以 O 为原点，$\overrightarrow{OF}$ 的方向为 y 轴正方向建立直角坐标系，则可得轨迹方程为 $x^2=2py$ 即 $y=\frac{1}{2p}x^2$，这是以 x 为自变量，y 为因变量的二次函数．在初中数学中就知道它的图象是抛物线．而 $y^2=2px$ 的图象是将开口向上的抛物线 $y=\frac{1}{2p}x^2$ 绕顶点沿顺时针方向旋转 $90°$ 得到的.

到一定点 F 和定直线 $l(F\notin l)$ 距离相等的点的轨迹叫作抛物线(parabola)，定点 F 叫作抛物线的焦点，定直线 l 叫作抛物线的准线(directrix).

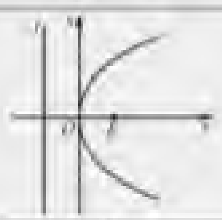
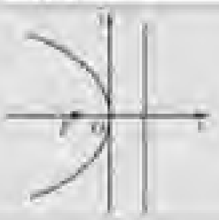
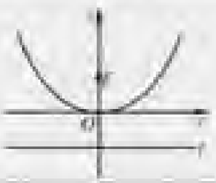
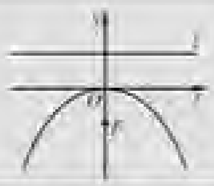
对任一 $p>0$，焦点为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线为 $x=-\frac{p}{2}$ 的抛物线方程为

$$y^2=2px$$

这称为抛物线的标准方程.

如果按其他方式建立坐标系，就得出抛物线的其他形式的方程．如果建立坐标系满足条件：原点是焦点到准线的垂线段的中点，一条坐标轴指向焦点从而垂直于准线，所得的抛物线的方程就称为标准方程．这样的标准方程及其图象有四种情况（见表 2.1），其中 $p>0$.

表 2.1

图形	焦点坐标	准线方程	标准方程
	$\left(\frac{p}{2},0\right)$	$x=-\frac{p}{2}$	$y^2=2px$
	$\left(-\frac{p}{2},0\right)$	$x=\frac{p}{2}$	$y^2=-2px$
	$\left(0,\frac{p}{2}\right)$	$y=-\frac{p}{2}$	$x^2=2py$
	$\left(0,-\frac{p}{2}\right)$	$y=\frac{p}{2}$	$x^2=-2py$

例 2 求如下抛物线的焦点坐标和准线方程：

（1）$y^2=4x$；　　　　（2）$y=ax^2$，其中 $a>0$.

解 (1)方程具有形式 $y^2=2px$，其中 $2p=4$，从而 $p=2$. 因此焦点坐标为 $\left(\frac{p}{2},0\right)=(1,0)$，准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，即 $x=-1$.

(2) 方程可化为 $x^2=\frac{1}{a}y$，具有标准形式 $x^2=2py$，其中 $p=\frac{1}{2a}$. 因此焦点坐标为 $\left(0,\frac{p}{2}\right)=\left(0,\frac{1}{4a}\right)$，准线方程为 $y=-\frac{p}{2}$，即 $y=-\frac{1}{4a}$.

练 习

1. 求下列各抛物线的焦点坐标和准线方程，并画出简图.

（1）$y^2=16x$；　（2）$y=16x^2$；　（3）$y^2=-\frac{1}{4}x$；　（4）$y=-\frac{1}{8}x^2$.

2. 求适合下列条件的抛物线的标准方程.

(1) 焦点为 $F(-2, 0)$;　　(2) 准线方程 $y=-2$.

2.3.2 抛物线的简单几何性质

实验 选取 $p>0$ 的值作出抛物线 $y^2=2px$ 的图象，如图 2－16 所示. 观察图象研究它的几何性质. 建议研究如下性质：

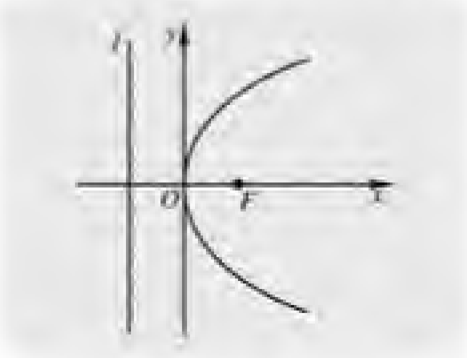


图 2－16

1. 范围：抛物线伸展的范围是有限还是无限？在上、下、左、右四个方向上都有限还是都无限？如果在某个方向上有限，找出在这个方向上最远的点.

2. 对称性：是否中心对称图形？如果是，找出对称中心. 是否轴对称图形？如果是，找出对称轴.

3. 你所能想到的其他性质.

下面我们通过抛物线的方程研究它的几何性质.

一、范 围

在方程 $y^2=2px$ 中将 x 当作已知数，求出 $y=\pm\sqrt{2px}$. 由于 $p>0$，因此 x 允许取值的范围为 $x\geqslant 0$. 这就是说，抛物线在 y 轴的右侧，向右无限延伸. 当 x 的值无限增大时，$|y|=\sqrt{2px}$ 也无限增大，图象向上和向下都无限延伸.

x 取最小值 0 时，$y=0$. 图象最左边的点是原点 $(0, 0)$.

二、对称性

点(x, y)关于x轴的对称点是$(x, -y)$. 在方程$y^2=2px$中将y换成$-y$，得到的$(-y)^2=2px$与原方程$y^2=2px$相同. 这说明，这条抛物线关于x轴对称，x轴是它的对称轴.

每一条抛物线有唯一一条对称轴，称为抛物线的轴（axis）.

三、顶点

抛物线和它的对称轴的交点称为抛物线的顶点.

比如，抛物线$y^2=2px$的顶点是原点$(0,0)$.

例1 一条抛物线关于x轴对称，顶点在原点，并且经过点$(1,2)$，求抛物线方程.

解 这条抛物线的标准方程具有形式$y^2=2px$. 将已知点$(1,2)$的坐标$x=1$，$y=2$代入方程得$2^2=2p\times1$. 因此$p=2$. 所求方程为$y^2=4x$.

例2 已知抛物线和它的对称轴，试设计几何作图法作出抛物线的焦点和准线.

解 以抛物线的顶点为原点，顶点到焦点的方向为x轴的正方向建立直角坐标系，则抛物线具有标准方程$y^2=2px$，焦点坐标为$\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，准线方程为$x=-\frac{p}{2}$.

过焦点作平行于y轴的直线与抛物线相交，得到两个交点$P_1\left(\frac{p}{2}, y_1\right)$，$P_2\left(\frac{p}{2}, -y_1\right)$，其中$y_1>0$. 由$y_1^2=2p\cdot\frac{p}{2}$得$y_1=p$. 因此，$P_1\left(\frac{p}{2}, p\right)$在直线$y=2x$上，是直线$y=2x$与抛物线的交点.

由此得到作抛物线的焦点和准线的作图法步骤如下（见图2-17）.

1. 抛物线的对称轴与抛物线相交得到顶点O.

2. 在对称轴上任取一个与O不重合的点A，使$\overrightarrow{OA}$指向抛物线的开口方向. 从A作$AB\perp OA$且$|AB|=2|OA|$，作射线OB与抛物线相交于点P.

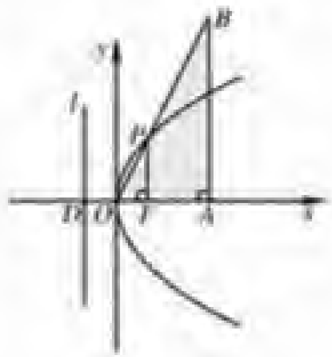


图 2-17

3. 过 P 作 $PF \perp OA$，与射线 OA 相交于 F. 则 F 为抛物线的焦点.

4. 延长 FO 到 D 使 $OD=FO$. 过 D 作 $l \perp OD$，则 l 为准线.

这其实是建模，将几何作图问题用代数语言来描述，建立模型加以解决，再将代数求解的结果通过几何作图来实现.

例 3 抛物形拱桥如图 2-18. 当拱顶离水面 2.5 m 时，水面宽 4.5 m. 如果水面上升 0.5 m，水面宽多少（精确到 0.01 m）?

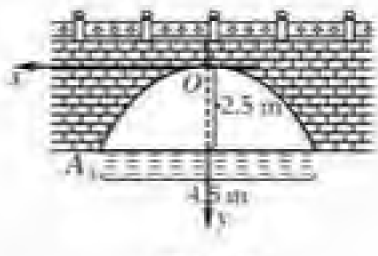


图 2-18

解 以拱桥顶为原点，以向下的方向为 y 轴正方向，1 m 为单位长，建立直角坐标系. 则现在水面与拱桥在第一象限内的交点 A_1 的坐标(x_1, y_1)为$(2.25, 2.5)$.

抛物线方程具有标准形式 $x^2=2py$. 由 $x_1^2=2py_1$ 得

$$2p=\frac{x_1^2}{y_1}=\frac{2.25^2}{2.5}=2.025.$$

水面上升 0.5 m 之后，水面与拱桥在第一象限内的交点 $A_2(x_2, y_2)$的纵坐标为 $y_2=2$. 代入抛物线方程得

$$x_2=\sqrt{2py_2}=\sqrt{2.025\times 2}\approx 2.01.$$

故水面宽为 $2.01\times 2=4.02$ (m).

练 习

1. 指出下列抛物线的顶点坐标、对称轴、焦点坐标、准线方程.

(1) $y^2=8x$; (2) $x^2=32y$; (3) $y=-24x^2$; (4) $x=-\frac{1}{16}y^2$.

2. 过点 $M(2,4)$ 作直线 l，与抛物线 $y^2=8x$ 只有一个公共点，这样的直线有________条.

3. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点作直线交抛物线于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，若 $x_1+x_2=6$，则 $|AB|=$________.

习题 3

学而时习之

1. 指出下列各抛物线的焦点坐标和准线方程，并画出简图.

(1) $y^2=x$;

(2) $x^2=-y$;

(3) $y^2=ax$ $(a\neq 0)$.

2. 抛物线 $y^2=ax$ 的准线方程为 $x=-1$，则 $a=$ (　　)

(A) -2　　(B) -4　　(C) 2　　(D) 4

3. 抛物线 $y^2=4x$ 上的点到其焦点最近距离的点的坐标为 (　　)

(A) $(0,0)$　　(B) $(1,1)$　　(C) $(1,0)$　　(D) $(-1,0)$

4. 抛物线 $y^2=2px$ 与直线 $ax+y-4=0$ 交于两点 A，B，其中点 A 的坐标为 $(1,2)$，该抛物线的焦点为 F，求 $|FA|+|FB|$ 的值.

温故而知新

5. 过抛物线 $y^2=4x$ 焦点的直线交抛物线于 A，B 两点，已知 $|AB|=8$，O 为坐

标原点，$\triangle OAB$ 的重心的横坐标为_______，直线 AB 的倾斜角为_______.

6. 设抛物线 $y^2=4x$ 上一点 P 到直线 $x+2=0$ 的距离为 5，则点 P 到抛物线焦点 F 的距离为_______.

7. 求过定点 $P(0,\ 1)$ 且与抛物线 $y^2=2x$ 只有一个公共点的直线的方程.

8. M 为抛物线 $y^2=4x$ 上动点，F 是焦点，P 是定点 $(3,\ 1)$，求 $|MP|+|MF|$ 的最小值.

多知道一点

圆锥截线

设直线 l，m 相交于点 S，夹角为锐角 α. 其中一条直线 m 绕另一条直线 l 旋转一周形成圆锥面. 则 S 是圆锥面的顶点，l 是圆锥面的轴. 圆锥面上过 S 的任意一条直线都是圆锥面的母线.

用一个不经过 S 点的平面 β 去截这个圆锥面，随着平面与轴所成角 θ 的不同，截线的形状也随之变化.

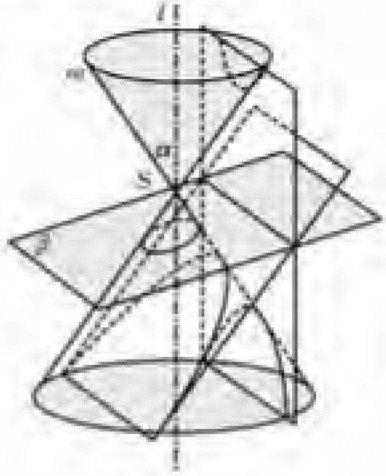


图 2-19

1. $\theta=\frac{\pi}{2}$，平面与轴垂直，截线是圆；

2. $\alpha<\theta<\frac{\pi}{2}$，截线是椭圆；

3. $\theta=\alpha$，截线是抛物线；

4. $0<\theta<\alpha$，截线是双曲线.

圆、椭圆、抛物线、双曲线都可以由平面截圆锥面得到，统称为圆锥曲线（conic section）.

例 如图 2-20，用一个平面去截圆锥，试说明为什么截线的形状是椭圆.

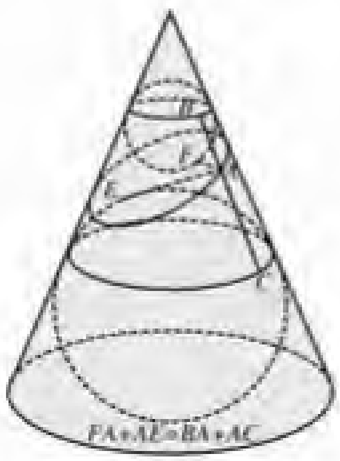


图 2-20

解 在圆锥内截面平面两侧各作一个球同时与圆锥面和截面相切. 两球与截面分别相切于点 E、F，与圆锥面各相切于一个圆.

对截线上任意一个点 A，如图 2-20 所示，过 A 作圆锥的母线与两圆分别相交于 B、C. 由于 AB 与 AF 都是球外一点到同一球面所作的切线，这两条切线段的长度相等：$|AB|=|AF|$. 同理有 $|AE|=|AC|$. 于是 $|AE|+|AF|=|AC|+|AB|=|BC|$. 当 A 在截线上变化时 $|BC|$ 不变. 这就说明了截线上的动点 A 到两点 E、F 的距离之和等于定值. 可见截线是以 E、F 为焦点的椭圆.

假如在上例中的平面与圆锥的轴垂直，则两个焦点 E、F 重合，截线椭圆变成以 E 为圆心的圆.

在其他情况下可以观察到截线的形状是抛物线或双曲线. 但其中的道理就不在这里讲了，有兴趣的同学可以参见本教材选修系列 4-1《几何证明选讲》.

2.4 圆锥曲线的应用

圆、椭圆、抛物线、双曲线统称为**圆锥曲线**．它们都可以由平面去截圆锥面得到．

圆锥曲线在自然界广泛存在，在生活、生产和科学技术中有广泛的应用．下面是一些初步的例子．

一、斜抛物体的轨迹

运动场上推出的铅球，投掷的手榴弹、投出的篮球，都是斜抛物体，它们的运动轨迹近似地都是抛物线．喷水池里喷出的水柱中的每一部分水也可以看作斜抛物体，水柱的形状也接近于抛物线．

这是物理学常识，借助于物理知识，建立适当的数学模型来描述物体的运动．

不从物体抛出时开始计算时间和坐标，而以物体到达最高点时的时刻为 0，位置为原点，这样可以简化运算，得出的方程也更简单．事实上，物体从抛出直到最高点这一段的斜抛（抛物线的一部分）也适用这种方式，培养学习习惯．

例 1 如图 2－21，将物体向斜上方抛出，抛出时的速度大小为 v_0，方向与水平方向的夹角为 α．假如只考虑重力，不计空气阻力，求证斜抛物体的运动轨道是抛物线的一部分，求出这条抛物线的焦点与准线之间的距离．

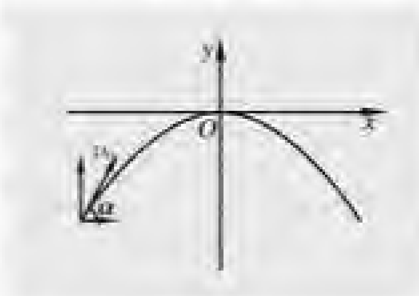


图 2－21

解 斜抛物体的运动可以分解为水平方向的运动和竖直方向的运动．水平方向没有受力，运动为匀速运动，速度大小为 $v_0\cos\alpha$．设轨道最高点为 O，则物体在点 O 只有水平方向的速度 $v_0\cos\alpha$ 而没有竖直方向的速度．在运动轨道所在的平面内建立直角坐标系，以 1 m 为单位长度，以 O 为原点，使 x 轴在水平方向，其方向指向物体在点 O 前进的方向，y 轴的正方向竖直向上．

物体在 x 轴方向上的运动是匀速运动，速度为 $v_0\cos\alpha$．以物体在点 O 的时刻为 0，则经过 t 秒之后的 x 坐标为 $x=(v_0\cos\alpha)t$．（允许 t 取负值，表示物体到达最高点 O 之前的情况．）

加速度大小为 $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$，$-g$ 表示方向向下．当 t 为负时算出的 y 就是物体到达最高点之前的 y 坐标．

物体在 y 轴方向上有重力加速度 $-g$，到达最高点 O 时（也就是 t

=0 时）的速度为 0．时刻 t 时的 y 坐标为 $y=-\frac{1}{2}gt^2$．

因此，在时刻 t 时物体的位置坐标 $(x, y)=\left(v_0t\cos\alpha, -\frac{1}{2}gt^2\right)$．

由 $x=v_0t\cos\alpha$ 解出 $t=\frac{x}{v_0\cos\alpha}$，代入 y 坐标表达式得

$$y=-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2,$$

即

$$x^2=-\frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g}y$$

具有抛物线的标准方程 $x^2=-2py$ 的形式，其中 $p=\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$．

这证明了斜抛物体的运动轨道是抛物线，这个抛物线的焦点与准线之间的距离 $p=\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$．

为什么命名为"抛物线"？这是因为它是"抛出的物体所走的路径"．

二、天体运动的轨道

天文学家开普勒根据前人观测行星运动的大量数据总结出行星运动的三大定律，其中第一定律是：

太阳系中的行星运动的轨道是椭圆，太阳位于椭圆的一个焦点．

牛顿根据开普勒定律得出了万有引力定律．这个定律指出：宇宙间任何两个物体之间都有吸引力，称为万有引力．万有引力的大小与两个物体的质量的乘积成正比，与它们之间的距离的平方成反比．

按照万有引力定律可以推出，绕太阳运动的天体，它的运动轨道是圆锥曲线．当天体运动的动能小于某一个值时，运动轨道是椭圆；等于这个值时，轨道是抛物线；大于这个值时，轨道是双曲线的一支．当轨道是抛物线或双曲线时，天体就不是太阳系中的行星，它将一去不复返．

例 2 某颗彗星的轨道是一个椭圆，太阳位于椭圆的一个焦点．彗星离太阳的最近距离是 1.486 天文单位，最远距离是 5.563 天文单位（1 天文单位是太阳与地球之间的平均距离，约为 1.50×10^8 km，是度量太空中的距离的一种单位）．轨道椭圆的长半轴和短半轴之长

各是多少个天文单位？

解 如图 2-22，设椭圆的焦点为 F_1，F_2，焦距为 $2c$，太阳位于焦点 F_2.

彗星位置 P 到两焦点的距离之和 $|PF_1|+|PF_2|$ 等于一个固定值 $2a$，要使 $|PF_1|$ 最大，必须距离之差 $|PF_1|-|PF_2|$ 最大. 但 $|PF_1|-|PF_2|\leqslant|F_1F_2|=2c$，仅当 F_1，F_2，P 成一条直线且 F_2 在 F_1 和 P 之间时，$|PF_1|-|PF_2|$ 达到最大值 $2c$. $|PF_1|$ 达到最大值 $\frac{2a+2c}{2}=a+c$. 而仅当 $|PF_1|$ 达到最大值 $a+c$ 时，$|PF_2|$ 达到最小值 $a-c$. 可见

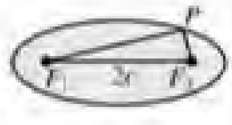


图 2-22

$$\begin{cases}a+c=5.563,\\ a-c=1.486.\end{cases}$$

解之得 $a=\frac{5.563+1.486}{2}=3.5245$，$c=5.563-3.5245=2.0385$.

因此 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3.5245^2-2.0385^2}\approx2.8752$.

椭圆的长半轴长 3.5245 天文单位，短半轴长 2.8752 天文单位.

三、光学性质及其应用

探照灯的反射面由抛物线的一部分绕轴旋转而成，光源安置在抛物线的焦点处，这样可以使发出的光线经过镜面的反射之后平行射出.

电影放映机需要将尽可能强的光线照在电影胶片上. 放映机的聚光灯的反射镜由椭圆的一部分绕长轴旋转而成，光源安置在椭圆的一个焦点处，正在放映的电影胶片位于另一个焦点. 光源发出的光线经过镜面的反射之后全部聚于另一个焦点，以最强的光线照亮电影胶片.

如果反射面由双曲线的一支绕轴旋转而成，光源安置于焦点，发出的光线经反射之后发散射出，就好像是从反射镜后面另一个焦点的位置射出的那样.

例3 探照灯反射镜由抛物线的一部分绕轴旋转而成，光源位于抛物线的焦点处，这样可以保证发出的光线经过反射之后平行射出，如图2－23所示．已知灯口圆的直径为60 cm，灯的深度为40 cm．

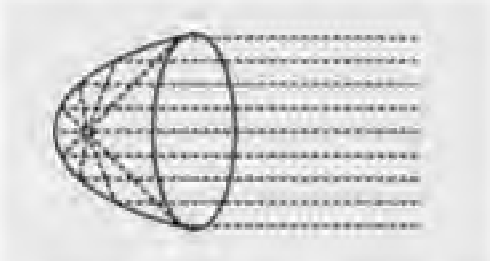


图2－23

（1）将反射镜的旋转轴与镜面的交点称为反射镜的顶点，光源应安置在旋转轴上与顶点相距多远的地方？

（2）为了使反射的光更亮，增大反射镜的面积，将灯口圆的直径增大到66 cm，并且保持光源与顶点的距离不变．求灯的深度．

解 （1）在反射镜的轴截面上建立直角坐标系，以抛物线的顶点（也是反射镜的顶点）为原点，以旋转轴为x轴并且使抛物线开口方向是x轴的正方向，以1 cm为单位长，如图2－24所示．则抛物线的方程具有标准形式$y^2=2px$．灯口圆与轴截面在一象限内的交点A的坐标为(40,30)，代入抛物线方程得

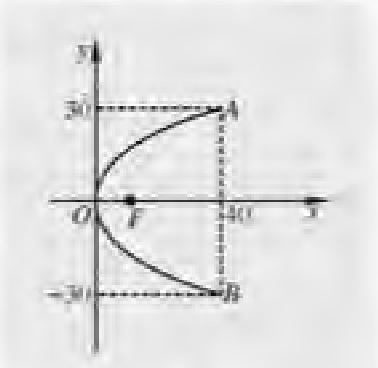


图2－24

$$30^2=2p\times40,$$

解之得$p=\frac{45}{4}$，焦点坐标为$\left(\frac{p}{2},0\right)=\left(\frac{45}{8},0\right)$，故光源所在位置与顶点的距离为$\frac{45}{8}\approx5.625$ (cm)．

光源应安装在旋转轴上离顶点5.625 cm处．

（2）坐标系仍如（1）．焦点与顶点的距离$\frac{p}{2}$不变，因此抛物线方程$y^2=2px$不变，为$y^2=\frac{45}{2}x$．灯口圆与轴截面在一象限的交点的纵

坐标变为$\frac{66}{2}=33$ cm. 将 $y=33$ 代入抛物线方程求横坐标 x，得

$$33^2=\frac{45}{2}x,\quad x=\frac{33^2\times 2}{45}=48.4\ (\text{cm}).$$

灯的深度为 48.4 cm.

练　习

1. 双曲线形自然通风塔的外形是双曲线的一部分绕其虚轴旋转所成的曲面，如图 2-25 所示. 它的最小半径为 12 m，上口半径为 13 m，下口半径为 25 m，高为 55 m. 选择适当的坐标系求此双曲线的方程.

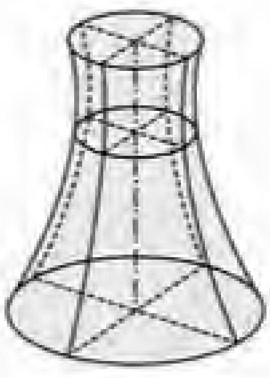


图 2-25

2. 某隧道横截面由抛物线及矩形的三边组成，尺寸如图 2-26 所示. 某大车空车时能通过隧道，现载一集装箱，箱宽 3 m，车与箱共高 4.5 m，试判断此车能否通过此隧道，说明理由.

图 2-26

习题 4

学而时习之

1. 某农场为节水推行喷灌技术，喷头装在管柱 OA 的顶端 A 处，喷出的水流在各个方向上呈抛物线状，如图 2-27 所示．现要求水流最高点 B 离地面 5 m，点 B 到管柱 OA 所在直线的距离为 4 m，且水流落在地面上以 O 为圆心，9 m 为半径的圆上，求管柱 OA 的高度．

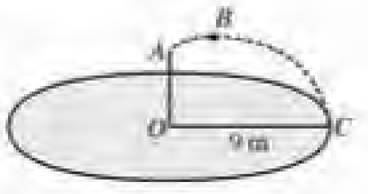


图 2-27

2. 在某平原上有一块低洼地区，一条运河从最低处 A 通往大海，最低点 A 处海拔高度为 1 m，如图 2-28 所示．该地区沿海平面的垂线 AB 的任意一个剖面与地面的交线均为相同的双曲线，B 为双曲线的中心．由于温室效应，海平面逐年上升，自 2004 年起，海平面平均每年上升 4 cm，专家预测，到 2054 年，该地区 10 km² 以内居住者必须迁移．请你预测，到 3004 年，该地区有多大范围内居住者必须迁移？

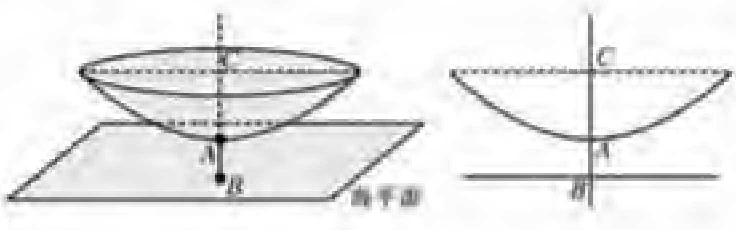


图 2-28

温故而知新

3. 某大桥有最大跨度的中央桥孔，它的跨度为 20 m，拱顶呈抛物线形，涨水时拱顶距水面 6 m，桥墩高出水面 4 m．现有一货轮欲通过此孔，该货轮水下宽度不超过 18 m，目前吃水线上部分中央船体高 5 m，宽 16 m．若不考虑水下深度，该货轮在现状况下能否通过桥孔，请说明理由．

4. 有一条光线沿直线 $y=4$ 射到抛物线 $y^2=4x$ 上的一点 P，经抛物线反射后，反射光线与抛物线的另一个交点是 Q，O 是抛物线的顶点，F 是抛物线的焦点，求弦 PQ 的斜率和△OPF 的面积 S．

数学实验

圆锥曲线的光学性质

实验1（抛物线的光学性质） 任选 $p>0$，画出抛物线 $y^2=2px$，标出它的焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ 的位置，它的对称轴是 x 轴.

如图2-29，从抛物线上任意一点 P 作平行于 x 轴的射线 PM，指向 x 轴的正方向（抛物线的开口方向）. 假定光线沿直线 MP 射到抛物线上的点 P. 根据光的反射定律，按照如下几何作图法作出反射光线 PQ：

过点 P 作抛物线的切线 t，过 P 作 $PN\perp t$，则 PN 是抛物线在点 P 的法线. 从 P 作射线 PQ 与入射光线 MP 分别位于法线 PN 的两侧，且 $\angle MPN=\angle NPQ$，则 PQ 是反射光线.

实际作图的时候可能有误差，得到的结果只能是近似的.

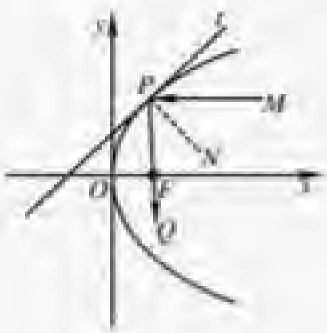


图2-29

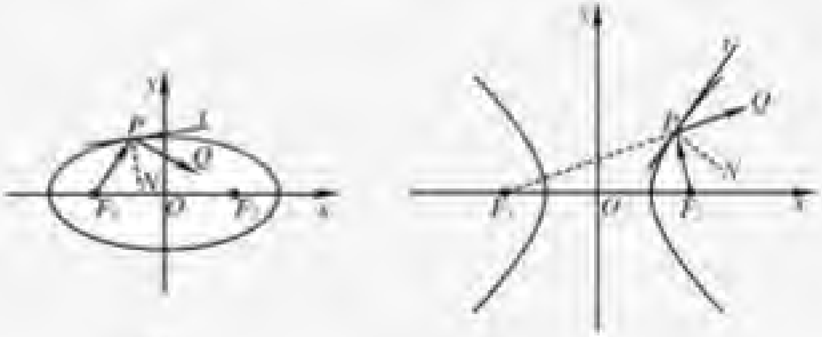
过抛物线上不同的点 P 作入射光线和反射光线，观察所有的反射光线是否都交于一点？如果是，交于哪一点？

实验2（椭圆的光学性质） 任选 $a>b>0$，画出椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，标出它的两个焦点 F_1，F_2，如图2-30(a).

在椭圆上任取一点 P，连接 F_1，P，让光线从 F_1 沿直线 F_1P 射向 P 点，按照光的反射定律作出反射光线 PQ.（按实验1所说

的方法过 P 作椭圆的切线 l 和法线 PN，并作 PQ 与 PF_1 位于 PN 的两侧且 $\angle F_1PN=\angle NPQ$.）

对不同的 P 作出不同的入射光线 F_1P 的反射光线，观察这些反射光线是否都交于一点？如果是，交于哪一点？



(a) (b)

图 2－30

实验 3（双曲线的光学性质） 任选 $a>0$，$b>0$，画出双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，标出它的两个焦点 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，如图 2－30(b).

从焦点 F_2 出发向双曲线上任一点 P 作入射光线，作出它的反射光线. 对双曲线上不同的点 P 作出不同的反射光线，观察所有这些反射光线，看它们汇聚于一点，还是看起来从某一点直接发射出来？

小结与复习

一、指导思想

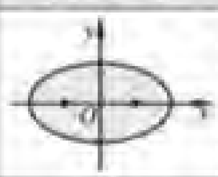
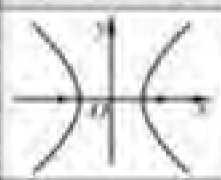
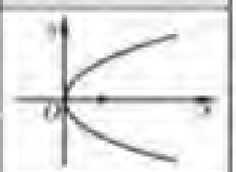
学习本章的目的，不仅是为了掌握圆锥曲线的定义和性质，还要更进一步学习如何用代数方法（坐标方法）研究几何问题．同时要学习如何利用运动的观点思考问题，如何利用数学研究运动变化着的现实世界．

二、内容提要

这一章的主要内容包括椭圆、双曲线、抛物线的定义，标准方程、简单几何性质，以及它们在实际中的一些应用．

1．三种曲线的标准方程(各取其中一种)、图形、性质见表 2.2.

表 2.2

	椭圆	双曲线	抛物线
几何条件	与两个定点的距离的和等于常数（但大于两定点之间的距离）	与两个定点的距离的差的绝对值等于常数（但小于两定点之间的距离）	与一个定点和一条定直线的距离相等
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$	$y^2=2px$ $(p>0)$
图形			
顶点坐标	$(\pm a,\ 0)$，$(0,\ \pm b)$	$(\pm a,\ 0)$	$(0,\ 0)$
对称轴	x 轴，长轴长 $2a$；y 轴，短轴长 $2b$	x 轴，实轴长 $2a$；y 轴，虚轴长 $2b$	x 轴

续表

	椭　圆	双曲线	抛物线
焦点坐标	$(\pm c,\ 0)$ $c=\sqrt{a^2-b^2}$	$(\pm c,\ 0)$ $c=\sqrt{a^2+b^2}$	$\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$
渐近线方程		$y=\pm\frac{b}{a}x$	

2．圆、椭圆、双曲线、抛物线统称圆锥曲线，它们的统一性如下：

在科学研究的应用中常常将圆看成椭圆的特殊情况。但在中学教材中将椭圆与圆看成不同的曲线。

（1）从方程的形式看：在直角坐标系中，这几种曲线的方程都是二元二次的，所以它们属于二次曲线．

（2）这几种曲线都是由平面截圆锥面得到的截线（见章头图）．

在宇宙间运动的天体，如行星、彗星、人造卫星等，由于运动速度的不同，它们的轨道有的是圆，有的是椭圆，有的是抛物线，有的是双曲线（图 2－31）．

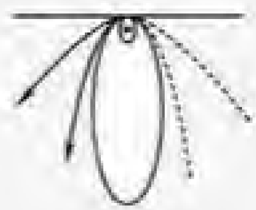


图 2－31

3．从几何学的观点看：坐标法是研究曲线的一种重要方法．本章在第七章的基础上进一步学习了求曲线方程的一般方法，如何利用曲线的方程及曲线的几何性质，以及用坐标法解简单的几何问题等．

4．椭圆、双曲线、抛物线是常见的曲线，利用它们的方程及几何性质，可以帮助我们解决一些简单的实际问题．本章通过例题，给出了解决某些实际问题的一般方法．

三、学习要求和要注意的问题

1．学习要求：

（1）掌握三种圆锥曲线的定义、标准方程和简单几何性质．

（2）能够根据具体条件，利用各种不同的工具画椭圆、双曲

线、抛物线的图形.

(3) 了解圆锥曲线的实际背景，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用.

(4) 通过已学习过的圆锥曲线的知识，了解曲线与方程的对应关系，进一步感受数形结合思想.

2. 需要注意的问题：

(1) 在引入曲线时，应通过丰富的实例，使学生了解圆锥曲线的背景与应用；

(2) 曲线与方程的教学应以学习过的曲线为主，注重使学生体会曲线与方程的对应关系，感受数形结合的基本思想；

(3) 本章研究几何图形时，大量采用了坐标法，所以在解答问题时，最好先画出草图，注意观察、分析图形的特征. 同时在解决实际问题时，要注意选择适当的坐标系，使问题变得简单.

四、参考例题

例1 一动圆与圆 $x^2+y^2+6x+5=0$ 外切，同时与圆 $x^2+y^2-6x-91=0$ 内切，求动圆圆心的轨迹方程，并说明它是什么样的曲线.

分析 本题可以按求点的轨迹方程的一般方法来解. 设动圆圆心的坐标为 (x, y)，利用初中学过的两圆相切的性质和判定定理（即充要条件）列出方程，最后化简整理.

本题也可以从分析图形入手来寻找解题思路. 设动圆的半径为 R，由图 2－32 可知，$|O_1P|=|O_1M|+R$，$|O_2P|=|O_2N|-R$. 因为 $|O_1P|+|O_2P|=|O_1M|+R+|O_2N|-R=|O_1M|+|O_2N|$ 为常数，利用椭圆的定义，可以直接求出它的方程.

解法1 如图 2－32，设动圆圆心为 $P(x, y)$，半径为 R，两已知圆的圆心分别为 O_1，O_2.

分别将两已知圆的方程

$$x^2+y^2+6x-5=0,$$

$$x^2+y^2-6x-91=0,$$

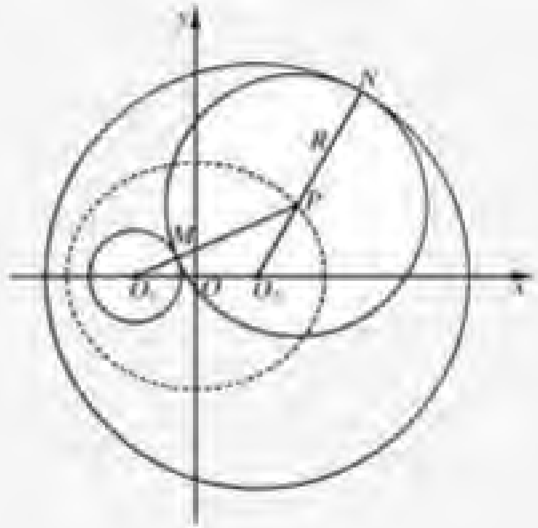


图 2-32

配方，得

$$(x+3)^2+y^2=4,$$

$$(x-3)^2+y^2=100.$$

当$\odot P$与$\odot O_1$：$(x+3)^2+y^2=4$外切时，有

$$|O_1P|=R+2. \quad ①$$

当$\odot P$与$\odot O_2$：$(x-3)^2+y^2=100$内切时，有

$$|O_2P|=10-R. \quad ②$$

①，②两式的两边分别相加，得

$$|O_1P|+|O_2P|=12,$$

即

$$\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=12. \quad ③$$

化简方程③．先移项，再两边分别平方，并整理，得

$$2\sqrt{(x+3)^2+y^2}=12+x. \quad ④$$

将④两边分别平方，并整理，得

$$3x^2+4y^2-108=0. \quad ⑤$$

将常数项移至方程的右边，两边分别除以 108，得

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1. \quad ⑥$$

由方程⑥可知，动圆圆心的轨迹是椭圆，它的长轴和短轴长分

别为 12，$6\sqrt{3}$，如图 2－32 中虚线所示.

解法 2 同解法 1 得方程

$$\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=12. \qquad ①$$

由方程①可知，动圆圆心 $P(x,y)$ 到点 $O_1(-3,0)$ 和点 $O_2(3,0)$ 距离的和是常数 12，所以点 P 的轨迹是焦点为 $(-3,0)$、$(3,0)$，长轴长等于 12 的椭圆，并且这个椭圆的中心与坐标原点重合，焦点在 x 轴上，于是可求出它的标准方程.

∵ $2c=6$，$2a=12$，

∴ $c=3$，$a=6$.

∴ $b^2=36-9=27$.

于是得动圆圆心的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1.$$

这个椭圆的长轴和短轴的长分别为 12，$6\sqrt{3}$，图形如图 2－32 中虚线所示.

例 2 如图 2－33，直线 $y=x-2$ 与抛物线 $y^2=2x$ 相交于点 A，B. (1) 求证：$OA\perp OB$；(2) 求 $|AB|$ 的长.

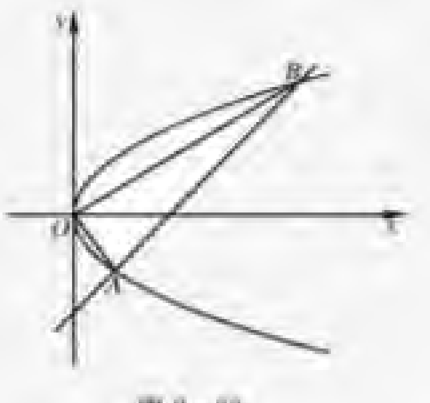


图 2－33

证法 1 设 A，B 两点的坐标为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，将 $y=x-2$ 代入 $y^2=2x$ 中，得

$$(x-2)^2=2x.$$

化简得

$$x^2-6x+4=0.$$

解得 $x_1=3-\sqrt{5}$，$x_2=3+\sqrt{5}$.

则 $y_1=1-\sqrt{5}$，$y_2=1+\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}&=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)\\&=x_1x_2+y_1y_2\\&=(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})\\&=0.\end{aligned}$$

$\therefore$ $OA\perp OB$，$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=2\sqrt{10}$.

证法 2 同证法 1 得方程

$$x^2-6x+4=0.$$

由一元二次方程根与系数的关系，可知

$$x_1+x_2=6,\quad x_1\cdot x_2=4.$$

$\because$ $y_1=x_1-2$，$y_2=x_2-2$，

$$\begin{aligned}\therefore\ y_1\cdot y_2&=(x_1-2)(x_2-2)\\&=x_1\cdot x_2-2(x_1+x_2-2)\\&=x_1\cdot x_2-2(x_1+x_2)+4\\&=4-12+4=-4.\end{aligned}$$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=4+(-4)=0$.

$\therefore$ $OA\perp OB$.

$$\begin{aligned}|AB|&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\\&=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1-x_2)^2}\\&=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\\&=\sqrt{2}\cdot\sqrt{36-16}=2\sqrt{10}.\end{aligned}$$

注 当方程中系数为字母或绝对值较大的数时，证法 2 比证法 1 简单，对于椭圆、双曲线更是如此.

例 3 如图 2－34 所示，已知△OFQ 的面积为 S，且 $\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{FQ}=1$，设 $|\overrightarrow{OF}|=c$，$S=\frac{\sqrt{14}}{4}c$，若以 O 为中心、F 为焦点的双曲线经过点 Q，建立适当的直角坐标系，求 $|\overrightarrow{OQ}|$ 最小时，此双曲线方程.

解 如图所示建立直角坐标系，设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

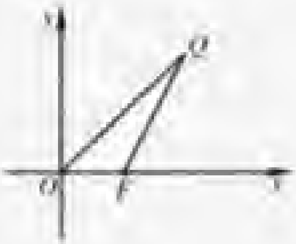


图 2-34

设 $Q(x_1, y_1)$，则 $\overrightarrow{FQ}=(x_1-c, y_1)$.

$\because$ $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OF}|\cdot y_1=\frac{\sqrt{14}}{4}c$， $\therefore$ $y_1=\frac{\sqrt{14}}{2}$.

又 $\because$ $\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{FQ}=(c,0)\cdot\left(x_1-c, \frac{\sqrt{14}}{2}\right)=(x_1-c)c=1$，

$\therefore$ $x_1=c+\frac{1}{c}$， $\therefore$ $|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{\left(c+\frac{1}{c}\right)^2+\frac{7}{2}}$.

$\because$ $c>0$， $\therefore$ 当 $c=1$ 时 $|\overrightarrow{OQ}|$ 最小.

$\therefore$ $x_1=2$， $\therefore$ $Q\left(2, \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$.

$\therefore$ $\begin{cases}\frac{4}{a^2}-\frac{7}{2b^2}=1,\\ a^2+b^2=1.\end{cases}$ 解之得 $\begin{cases}a^2=\frac{1}{2},\\ b^2=\frac{1}{2}.\end{cases}$

故所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{\frac{1}{2}}-\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$.

即 $2x^2-2y^2=1$.

复习题二

学而时习之

1. 根据下列条件判断方程$\frac{x^2}{9-k}+\frac{y^2}{4-k}=1$表示什么曲线.

   (1) $k<4$； (2) $4<k<9$.

2. 当α从$0°$到$180°$时，曲线$x^2+y^2\cos\alpha=1$怎样变化?

3. 与两圆$x^2+y^2=1$及$x^2+y^2-8x+12=0$都外切的圆的圆心在（　　）

   (A) 一个椭圆上 (B) 双曲线的一支上

   (C) 一条抛物线上 (D) 一个圆上

4. 已知△ABC三边AB，BC，CA的长成等差数列，且$|AB|>|CA|$，点B，C的坐标为$(-1,0)$，$(1,0)$，求点A的轨迹方程，并指出它是什么曲线.

5. 在椭圆$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$上求一点，使它与两个焦点的连线互相垂直.

6. 直线$x-2y+2=0$与椭圆$x^2+4y^2=4$相交于A，B两点，求A，B两点的距离.

7. 已知中心在原点的双曲线的一个焦点是$F_1(-4,0)$，一条渐近线的方程是$3x-2y=0$，求双曲线的方程.

8. 一个圆的圆心在双曲线$3x^2-y^2=12$的右焦点上，并且此圆过原点，求这个圆的方程.

9. 一圆经过点$F(0,3)$，且和直线$y+3=0$相切，求圆心的轨迹方程，并画出图形.

10. 求抛物线$y^2=2px$ $(p>0)$上各点与焦点连线中点的轨迹方程.

11. 设抛物线的顶点为O，经过焦点垂直于轴的直线和抛物线交于两点B，C，经过抛物线上一点P垂直于轴的直线和轴交于点Q. 求证：线段$|PQ|$是$|BC|$和$|OQ|$的比例中项.

温故而知新

12. 已知某荒漠上有两定点A，B，它们相距2 km，现准备在荒漠上围垦出一片以

AB为一条对角线的平行四边形区域建成农艺园，按照规划，围墙总长为8 km．该荒漠上又有一条直线水沟l恰好经过点A，且与AB成30°角．现要对整条水沟进地加固，但考虑到今后农艺园的水沟要重新设计改造，所以对水沟可能被农艺园围进的部分暂不加固，问暂不加固的部分有多长？

13．设F_1，F_2是双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$的两个焦点，点P是双曲线上一点，且$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则$|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|=$（　　）

（A）2　　（B）$2\sqrt{2}$　　（C）4　　（D）8

14．过抛物线$y^2=2px$（$p>0$）的焦点F的直线与抛物线相交于A，B两点，自A，B向准线作垂线，垂足分别为A'，B'，求证：$\angle A'FB'=90^\circ$．

15．点P是椭圆$16x^2+25y^2=1\ 600$上一点，F_1，F_2是椭圆的两个焦点，又知点P在x轴上方，F_2为椭圆的右焦点，直线PF_2的斜率为$-4\sqrt{3}$，求$\triangle PF_1F_2$的面积．

16．两定点的坐标分别为$A(-1,0)$，$B(2,0)$，动点M满足条件$\angle MBA=2\angle MAB$，求动点M的轨迹方程．

17．设直线l与抛物线$y^2=2px$（$p>0$）交于$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点，其中$y_1>y_2$．

（1）若$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OX}=0$，求$l$与$x$轴的交点坐标；

（2）是否存在定点M，使得当l经过M时，总有$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$成立．

上下而求索

中心投影与圆锥曲线

18．平面α与平面β不平行．点$S\notin\alpha$且$S\notin\beta$．从S向平面α作垂线，垂足为O．以O为圆心在平面α上作圆O．

（1）以S为中心作中心投影，将圆O投射到平面β上，得到什么曲线？

（2）在平面α内再作若干条直线，分别与圆O相交、相切或相离．以S为中心作中心投影将圆和直线投射到平面β上．圆的投射像与直线的投射像可能有什么位置关系？

（3）改变平面β的方向，同样研究上面的问题，看看些什么可能的结果．

(4) 可以利用几何知识从理论上研究上述问题，也可以用实验方法研究．如果用实验方法研究，可以用玻璃板作为平面 α，将图形画在上面．以墙面或桌面作为平面 β．在点 S 处放置点光源将玻璃板上的图形照射到墙上或桌面上．

数学文化

圆锥曲线小史

平面在圆锥面上截得的不同曲线称为圆锥曲线．当平面与圆锥面的轴线垂直时，截得的曲线是一个圆；当平面与圆锥面的轴线不垂直，随着夹角逐渐变小，截得的曲线分别是一个椭圆，一条抛物线，或者双曲线的一支．

在平面直角坐标系中，圆锥曲线又称为二次曲线．

圆锥曲线的研究具有悠久的历史，圆锥曲线的性质在实际中具有广泛的应用．

早在公元前350年，柏拉图学派的梅内克缪斯（Menaechmus）为了解决三等分角问题和倍立方问题，首先系统地研究了圆锥曲线．欧几里得（Euclidean）、阿基米德（Archimeds）都写了圆锥曲线方面的著作．阿基米德证明了，由抛物线与它的弦围成的图形，它的面积等于弦与弦两端的切线所构成的三角形面积的2/3．对圆锥曲线性质的研究而闻名于世的首推古希腊著名的几何学家、天文学家阿波罗尼奥斯（Appllonius，约公元前262—前190），他是欧几里得的学生，在亚历山大学派中与欧几里得、阿基米德齐名的三大学者之一．他首先证明了三种圆锥曲线都可以通过用一个平面与圆锥面相截而得到，而且知道了圆锥曲线的光学性质．他所写的《圆锥曲线论》是一本全面、系统、具有独创性的古希腊几何杰作．在此后的一千多年的时间内，后人（至少在几何上）几乎不能再为它增添什么新的内容．

17世纪中叶，笛卡尔（Descartes）发明了解析几何学，利用坐标法对圆锥曲线重新进行了研究，发现任何二次曲线，在建立适当的坐标系后，一般总能归结为椭圆、抛物线和双曲线的标准方

程，因此，圆锥曲线又称为二次曲线。

圆锥曲线的理论具有广泛的应用，除了应用圆锥曲线的光学性质之外，天体运行的轨道遵循圆锥曲线的规律。开普勒（Kepeler，1571—1630）在长期天文观察的基础上，发现了行星沿椭圆轨道运动，并提出了著名的行星运动三定律。牛顿（Newton，1642—1727）对开普勒的成就加以发展，发现了万有引力定律，利用数学严格地计算出：当初始速度为 7.9 千米/秒时，物体的轨道是一个圆；当初始速度超过 7.9 千米/秒，但小于 11.2 千米/秒时，物体的轨道是一个椭圆；而当初始速度大于 11.2 千米/秒时，物体将沿着抛物线的轨道远离地球永不回头。

第3章 导数及其应用

求积问切难题多，
瞬速极值奈若何.
群贤同趋坎坷路，
双雄竞渡智慧河.
百年寻谜无穷小，
万代受益财富多.
撑起数学参天树，
人类精神奏凯歌.

如何求曲线上任一点处的切线，如何求运动物体在每一时刻的瞬时速度，这些问题好像是无穷无尽、永远做不完．但是，用微积分的方法，成千上万的问题被一举突破，一个新的数学领域出现了．所以恩格斯认为，微积分的发现是人类精神的伟大胜利．

3.1 导数概念

3.1.1 问题探索——求自由落体的瞬时速度

伽利略通过实验和推理发现了自由落体的运动定律：物体下落的距离 s 和所用的时间 t 的平方成正比．如果距离单位用米(m)，时间单位用秒(s)，实验测出近似地有函数关系：

$$s=s(t)=4.9t^2.$$

直接让物体从空中下落，它落得很快，不便观察测量．伽利略是让小球从光滑的斜面上滚下来进行观察测量的．

伽利略发现，小球在斜面上滚下的距离 s 和所用的时间 t 之间，有函数关系 $s=s(t)=at^2$，这叫作小球的运动方程．这里，a 是与斜面的坡度有关的常数．

伽利略看到，重力作用下在斜面上向下滚的小球，每时每刻都滚得更快．但是，他只知道如何计算在一个时间段里的平均速度，却不知道如何计算小球在某一个时刻的速度，即瞬时速度．

100 多年之后，牛顿给出了瞬时速度的概念和计算方法，回答了伽利略的问题．

牛顿是怎么想怎么做的呢?

如果小球在某个斜面上向下滚动的运动方程是

$$s(t)=3t^2,$$

要计算小球在开始运动 2 s 时的速度，不妨先看看它在 2 s 到 2.1 s 之间的平均速度，即在区间［2，2.1］上的平均速度：

$$\frac{s(2.1)-s(2)}{2.1-2}=\frac{13.23-12}{0.1}=12.3\ (\mathrm{m/s}).$$

同样地，可以计算出[2，2.01]，[2，2.001]，…上的平均速度，也可以计算出[1.99，2]，[1.999，2]，…上的平均速度．

仔细观察下表，时间间隔越来越小的过程中，对应的平均速度似乎越来越接近一个数值，就是 12(m/s)．

要计算物体的速度，就要知道物体在一段时间里走过的一段距离，用时间除距离得到速度，也叫平均速度．如果只看某一个时刻，物体在这个时刻只有一个位置，时间和距离都是0，通常的速度概念不是失去了意义吗？

所以，伽利略当初的困惑是深刻的，是数学上的困难．

时间区间	间隔 s	平均速度 (m/s)	时间区间	间隔 s	平均速度 (m/s)
[2,2.1]	0.1	12.3	[1.9,2]	0.1	11.7
[2,2.01]	0.01	12.03	[1.99,2]	0.01	11.97
[2,2.001]	0.001	12.003	[1.999,2]	0.001	11.997
[2,2.000 1]	0.000 1	12.000 3	[1.999 9,2]	0.000 1	11.999 7
[2,2.000 01]	0.000 01	12.000 03	[1.999 99,2]	0.000 01	11.999 97
…	…	…	…	…	…

但是，时间间隔的缩小是一个无穷无尽的过程. 有限的几次计算，能得出12(m/s)这个确定的结果吗?

用字母代替数，可以把问题看得更清楚：

设 d 是一个绝对值很小的非零的数，在 $[2, 2+d]$ 或 $[2+d, 2]$ 这段时间里，小球运动的平均速度是

$$\frac{3(2+d)^2-3\times 2^2}{d}=\frac{3(4d+d^2)}{d}=(12+3d)\ (\text{m/s}).$$

当 d 越来越接近于0时，这个平均速度确实就越来越接近于12(m/s).

用数学语言来说，就是"时间段的长度趋于0时，这段时间内的平均速度以12(m/s)为极限".

这个极限数值，就叫作小球开始运动后2 s时的瞬时速度.

用这个办法，不难计算小球在任意时刻 t 的瞬时速度：先计算出时刻 t 和 $t+d$ 之间这段时间运动的距离，除以这时间段的长度 d，求出平均速度并把结果化简，再让 d 趋于0，就得到时刻 t 的瞬时速度.

计算过程是：

(1) 求平均速度

$$\frac{s(t+d)-s(t)}{d}=\frac{3(t+d)^2-3t^2}{d}=6t+3d;$$

(2) 在平均速度表达式 $6t+3d$ 中让 d 趋于0，得到 $6t$. 所以，小球在时刻 t 的瞬时速度是 $6t$(m/s).

类似地，从自由落体的运动方程 $s(t)=4.9t^2$ 出发，可以求出它下落 t 秒时的瞬时速度为 $9.8t$(m/s).

例 运动员从10 m高台跳水时，从腾空到进入水面的过程中，

不同时刻的速度是不同的．设起跳 t 秒后运动员相对水面的高度为：

$$H(t)=-4.9t^2+6.5t+10.$$

用代数推导方法计算在 2 s 时运动员的速度（瞬时速度），再用数值计算列表观察检验计算的结果．

解 计算步骤是：

（1）求$[2,\ 2+d]$上的平均速度：

$$\frac{H(2+d)-H(2)}{d}=\frac{-4.9d^2-13.1d}{d}=-4.9d-13.1;$$

（2）在平均速度表达式 $-4.9d-13.1$ 中让 d 趋于 0，得到 -13.1．所以，运动员在 2 s 时的瞬时速度是 -13.1 m/s．

下面是数值计算的结果：

时间区间	间隔 s	平均速度 (m/s)	时间区间	间隔 s	平均速度 (m/s)
[2,2.1]	0.1	−13.59	[1.9,2]	0.1	−12.61
[2,2.01]	0.01	−13.149	[1.99,2]	0.01	−13.051
[2,2.001]	0.001	−13.1049	[1.999,2]	0.001	−13.095 1
[2,2.000 1]	0.000 1	−13.100 49	[1.999 9,2]	0.000 1	−13.099 51
[2,2.000 01]	0.000 01	−13.100 049	[1.999 99,2]	0.000 01	−13.099 951
…	…	…	…	…	…

从计算结果看出，当时间间隔越来越小时，运动员的平均速度趋于 -13.1 m/s，这和上面的代数推导的结论是一致的．

现在，把上面解决问题的思路和方法总结一下：

（1）开始提出的问题是：知道了运动方程，求某个时刻的瞬时速度；

（2）但是我们还不知道如何用数学语言描述瞬时速度；

（3）所以我们面临两个任务，要建立瞬时速度的数学概念，并且找出计算方法；

这样，既有了瞬时速度的数学概念，又有了计算它的方法．

（4）要计算时刻 t 的瞬时速度 $v(t)$，先求出时刻 t 和时刻 $t+d$ 之间这个时间段的平均速度 $v(t,\ d)$；

（5）再在 $v(t,\ d)$ 中让 d 趋于 0，得到的极限数值就叫瞬时速度 $v(t)$．

若物体的运动方程为 $s=f(t)$，则物体在任意时刻 t 的瞬时速度 $v(t)$，就是平均速度 $v(t,\ d)=\dfrac{f(t+d)-f(t)}{d}$ 在 d 趋于 0 时的极限．

练 习

1. 在上例中，求出运动员在任意时刻 t 的瞬时速度.
2. 在上例中，求出：
   (1) 运动员起跳时刻的瞬时速度；
   (2) 运动员到达最高点时的瞬时速度；
   (3) 运动员入水时的瞬时速度.

习题 1

学而时习之

1. 匀速运动物体的运动方程是 $s=s(t)=s_0+v_0t$，求物体在时刻 t 的瞬时速度.
2. 一球沿某一斜面自由滚下，测得滚下的垂直距离 h（单位：m）与时间 t（单位：s）之间的函数关系为 $h=t^2$，求 $t=4$ s 时此球在垂直方向的瞬时速度.

温故而知新

3. 根据竖直上抛物体的运动方程

$$h(t)=h_0+v_0t-\frac{gt^2}{2},$$

   计算该物体在时刻 t 的瞬时速度，再应用物理学的能量守恒原理，分析运动过程中动能和势能的相互转化，说明用数学方法计算出的瞬时速度是否和物理现象相符合.

4. 设 $f(x)$ 是增函数，请分别指出 $d>0$ 或 $d<0$ 时，$\frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$ 的符号.

3.1.2 问题探索——求作抛物线的切线

在历史上，解析几何主要奠基人笛卡儿，曾经研究过这个问题，但他所用的方法比较特殊，我们需要寻求一般些简便的方法。

遇到一个问题而不知道如何解答时，不妨想想过去做过的类似的问题，看哪些经验适用于解决新的问题。

温故知新，是学习知识的一般规律。

从特殊过渡到一般，是思考数学问题的好方法。

这样的设想如果实现，就建立了一般曲线的切线的概念，又给出了作切线的途径。

自由落体的速度，方向总是向下的。

竖直上抛的物体，例如跳水运动员跳水的运动过程中，速度的方向开始向上，后来向下。

斜抛或平抛的物体，例如炮弹的运动过程中，速度的方向时时也在变化。在物理中知道，这时物体运动的轨线是抛物线，而速度的方向线正是抛物线的切线。

但是，怎样作出抛物线的切线呢？

过去，我们作过圆的切线。

圆的切线垂直于半径，这条性质对抛物线用不上。

但是，圆的切线和割线的某些联系，却有启发性。

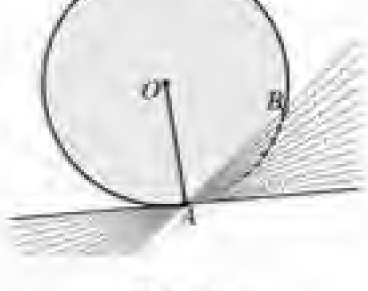


图 3－1

如图 3－1，A、B 是圆周上两点，过 AB 可以作一条割线。当点 B 趋于 A 时，割线就趋于切线的位置。

对于一般曲线，也可以照此办理。

图 3－2 是曲线 $y=f(x)$ 的图象。P，Q 是曲线上的两个点，直线 PQ 是曲线的割线。让点 Q 趋于 P，割线 PQ 如果趋于一条直线，这直线不就是曲线在点 P 处的切线吗？

图 3－2

下面回到作抛物线切线的具体问题上来，用实际操作检验我们的设想是否有效.

看得出，问题的困难在于不知道要求的直线需要确定什么，也就是问题没有说清楚，说到底说清楚了，往往就有了解决的办法.

图 3－3 是抛物线 $y=f(x)=x^2$ 的图象，$P(1,1)$ 是图象上的一个点. 为了过点 P 作出该抛物线的切线，只要求出这条切线的斜率就可以了.

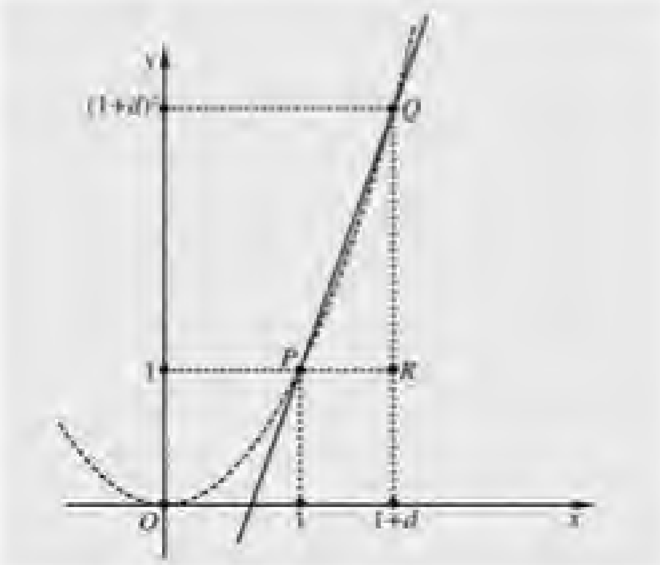


图 3－3

在抛物线上再取一个点 $Q(1+d,(1+d)^2)$，作割线 PQ. 当 d 趋于 0 时，点 Q 趋于点 P，割线 PQ 趋于所要作的切线，割线 PQ 的斜率也就趋于切线的斜率.

过 Q 作 y 轴的平行线，过 P 作 x 轴的平行线，两线交于 R. 则在直角三角形 QRP 中，斜边 PQ 的斜率就是 $\angle QPR$ 的正切，即

$$\frac{QR}{PR}=\frac{(1+d)^2-1^2}{d}=2+d,$$

让 d 趋于 0，得到过点 P 的切线的斜率为 2.

根据直线的点斜式方程，得到切线的直线方程：

$$y=2x-1.$$

这说明我们的设想是对的.

同样的方法，可以求出这条抛物线上任一点 $P(u,u^2)$ 处的切线的斜率. 具体的步骤为：

(1) 取不同于 P 的点 $Q(u+d,(u+d)^2)$，根据 P，Q 两点的坐

在解决问题的过程中，我们实际上得到了根据函数的解析式计算函数图像上任一点处切线斜率的方法.

标，计算出直线 PQ 的斜率 $\dfrac{(u+d)^2-u^2}{(u+d)-u}=2u+d$；

(2) 在 PQ 的斜率 $2u+d$ 中让 d 趋于 0，得到点 $P(u,\ u^2)$ 处切线斜率为 $2u$.

所以，过点 $P(u,\ u^2)$ 的切线的直线方程为 $y=2ux-u^2$.

一般地，设 $P(u,\ f(u))$ 是函数 $y=f(x)$ 的曲线上的任一点，则求点 P 处切线斜率的方法是：

(1) 在曲线上取另一点 $Q(u+d, f(u+d))$，计算直线 PQ 的斜率

$$k(u,\ d)=\frac{f(u+d)-f(u)}{d};$$

(2) 在所求得的 PQ 的斜率的表达式 $k(u,\ d)$ 中让 d 趋于 0，如果 $k(u,\ d)$ 趋于确定的数值 $k(u)$，则 $k(u)$ 就是曲线在点 P 处的切线的斜率.

例 1 求二次函数 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 图象曲线上点 $P(u,\ f(u))$ 处切线的斜率.

解 1. 在曲线上取另一点 $Q(u+d,\ f(u+d))$，计算直线 PQ 的斜率

$$k(u,\ d)=\frac{f(u+d)-f(u)}{d}=2au+da+b.$$

2. 在所求得的斜率表达式中让 d 趋于 0，表达式趋于 $2au+b$.

所以，所求的切线的斜率 $k(u)=2au+b$.

例 2 初速大小为 v 的炮弹，如果发射方向和地面所成的角为 θ，则炮弹所经过的曲线在不计空气阻力时为抛物线. 以炮弹到发射点的水平距离为自变量 x，炮弹到发射点的垂直距离 y 可以看成是 x 的函数，其表达式为 $y=f(x)=x\tan\theta-\dfrac{gx^2}{2v^2\cos^2\theta}$，其中 $g=9.8$ 是重力常数. 根据例 1 的结果，求 $f(x)$ 的曲线上任一点 $(x,\ f(x))$ 处切线的斜率.

解 对照例 1，$a=\dfrac{-g}{2v^2\cos^2\theta}$，$b=\tan\theta$，$u=x$，故所求斜率为

$$k(x)=\frac{-gx}{v^2\cos^2\theta}+\tan\theta.$$

练 习

1. 判断曲线 $y=2x^2$ 在点 $P(1,2)$ 处是否有切线，如果有，求出切线的方程.
2. 设 $P(x_0, y_0)$ 是曲线 $y=3-x^2$ 上的一点，写出曲线在点 P 处的切线的方程.

习题 2

学而时习之

1. 求曲线 $y=x^2+1$ 在点 $P(1,2)$ 处的切线的斜率.
2. 计算抛物线 $y=x^2-3x+2$ 上任一点 $P(u, v)$ 处的切线的斜率，并求出抛物线顶点处切线的方程.

温故而知新

3. * 用"Z+Z 超级画板"或具有类似功能的作图软件，取适当的单位和比例，在计算机屏幕上作出图 3-4 所示的抛物线，在抛物线上任取一点 P，使用例 2 中求出的斜率作过 P 的直线，拖动点 P 或改变炮弹的出射角，观察直线与曲线是否相切.

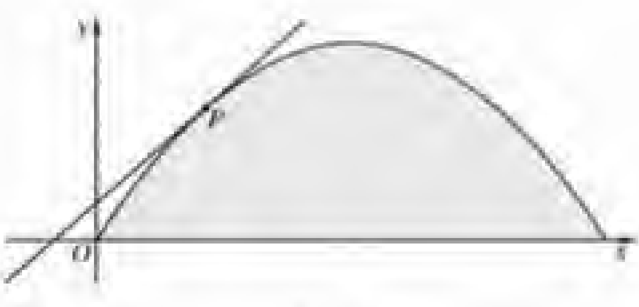


图 3-4

3.1.3 导数的概念和几何意义

在研究函数的增减情况时，常常用到函数 $f(x)$ 的差分 $f(u+h)-f(u)$，那时为了方便，设步长 $h>0$。这样，差分 $f(u+h)-f(u)$ 就是函数 $f(x)$ 在区间 $[u, u+h]$ 上的改变量。

如果指的差分 $f(u+d)-f(u)$ 中步长 d 可正可负。当 $d<0$ 时，要考虑的其实是函数 $f(x)$ 在 $[u+d, u]$ 上的改变量 $f(u)-f(u+d)$，对应的自变量的改变量就是 $u-(u+d)=-d$，两个改变量的比等于 $\frac{f(u)-f(u+d)}{-d}=\frac{f(u+d)-f(u)}{d}$，由此可见，不论步长 d 是正数还是负数，差商的表达式都一样，都可以写成 $\frac{f(u+d)-f(u)}{d}$.

前面我们研究了两类问题，一类问题来自物理学，涉及平均速度和瞬时速度；另一类问题来自几何学，涉及割线斜率和切线斜率．两类问题来自不同的学科领域，但却有着相同的数学模型．

两类问题，都涉及下列几件事：

(1) 一个函数 $f(x)$，可以是运动方程，也可以是曲线方程；

(2) 函数 $f(x)$ 在 $x=u$ 处步长为 d 的差分 $f(u+d)-f(u)$，可以是物体在某个时段中运动的距离，也可以是曲线上两点纵坐标的差；

(3) 上述差分和步长 d 的比 $\frac{f(u+d)-f(u)}{d}$，它可以是物体在某个时段的平均速度，也可以是过曲线上两点的割线的斜率；

从数学上看，它是函数 $f(x)$ 在两点处的函数值之差和对应的自变量之差的比，通常叫作 $f(x)$ 在 $x=u$ 处步长为 d 的"差商".

(4) 上述差商在步长趋于 0 时，如果趋于一个确定的数值，这个数值在前一类问题中就是运动物体在时刻 u 的瞬时速度，在后一类问题中就是曲线在点 $(u, f(u))$ 处切线的斜率．

在前面研究过的具体情形，差商可能是平均速度或割线的斜率．一般地，差商表示的是函数在自变量的某个区间上的平均变化率，它反映了自变量在某个范围内变化时，函数值变化的总体的快慢．

在各种实际问题中，常常用函数的平均变化率对事物的发展过程进行评价．

例 1 国家环保局在规定的排污达标的日期前，对甲、乙两家企业进行检查，其连续检测结果如图 3－5 所示(图中 $W_1(t)$、$W_2(t)$ 分别表示

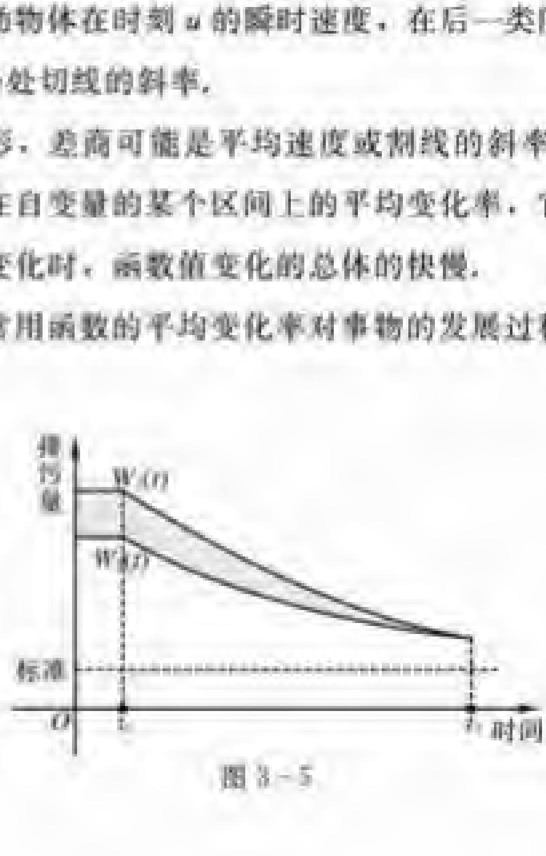


图 3－5

甲、乙企业在时刻 t 的排污量)．试问哪个企业治污效果较好？

解 在时刻 t_1 处，虽然 $W_1(t_1)=W_2(t_1)$，即排污量相等，但是考虑到一开始有

$$W_1(t_0)>W_2(t_0),$$

所以有

$$\frac{W_1(t_1)-W_1(t_0)}{t_1-t_0}>\frac{W_2(t_1)-W_2(t_0)}{t_1-t_0},$$

这说明在单位时间里企业甲比企业乙的平均治污率大．若照此趋势发展下去，企业甲很可能较快地达到规定的排污标准．

在上面的问题解答中，平均治污率的表达式也可以使用前面使用的函数的差商的表达式．例如，记 $d=t_1-t_0$，$t_1=t_0+d$，则

$$\frac{W_1(t_1)-W_1(t_0)}{t_1-t_0}=\frac{W_1(t_0+d)-W_1(t_0)}{d}.$$

当然，如果让 $t_0=t_1-d$，则有

$$\frac{W_1(t_1)-W_1(t_0)}{t_1-t_0}=\frac{W_1(t_1)-W_1(t_1-d)}{d}.$$

这些表达式尽管形式不同，实际的意义并无区别，都是函数的差分和对应的步长的比．

例 2 如图 3-6，投石入水，水面产生圆形波纹区．圆的面积随着波纹的传播半径 r 的增大而增大．计算：

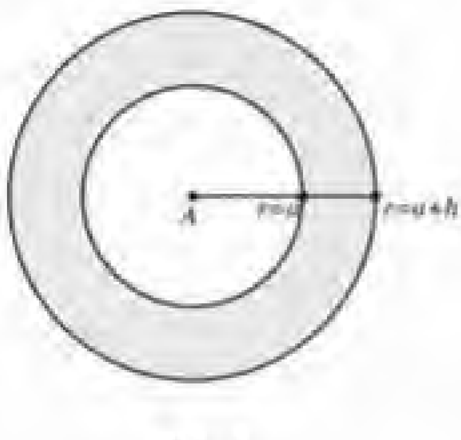


图 3-6

(1) 半径 r 从 a 增加到 $a+h$ 时，圆面积相对于 r 的平均变化率；

(2) 半径 $r=a$ 时，圆面积相对于 r 的瞬时变化率．

解 （1）半径 r 从 a 增加到 $a+h$ 时，圆的面积从 πa^2 增加到 $\pi(a+h)^2$，其改变量为 $\pi((a+h)^2-a^2)$，而半径 r 的改变量为 h，两者的比就是所求的圆面积相对于半径 r 的平均变化率：

$$\frac{\pi((a+h)^2-a^2)}{h}=\frac{\pi(2ah+h^2)}{h}=\pi(2a+h).$$

（2）在上面得到的平均变化率表达式中，让 r 的改变量 h 趋于 0，得到半径 $r=a$ 时，圆面积相对于 r 的瞬时变化率为 $2\pi a$。

众多的平均变化率，圆面积相对于半径 r 的平均变化率，还有前面讨论过的运动物体的平均速度，以及函数曲线的割线的斜率，从数学上看，无非是函数值的改变量与对应的自变量的改变量的比，即差商，它可以刻画出函数在某个区间上的平均变化率。

让所考虑的区间的一个端点 x 固定，当区间的长度趋于 0 时，如果平均变化率趋于一个极限值，这个极限值就可以看成是函数在点 x 处的瞬时变化率。

瞬时速度、切线的斜率以及例 2 中所求的圆面积相对于半径的瞬时变化率，都是函数的瞬时变化率。

函数的瞬时变化率，数学上叫作函数的导数(derivative)或微商。

定义 设函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的某个区间上有定义，如果比值 $\frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$ 在 d 趋于 0 时（$d\neq 0$）趋于确定的极限值，则称此极限值为函数 f 在 $x=x_0$ 处的导数或微商，记作 $f'(x_0)$。

用更多的符号代替语言，上述定义可以简单地表述为：

$$\frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}\to f'(x_0)\quad (d\to 0).$$

这个表达式读作"d 趋于 0 时 $\frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$ 趋于 $f'(x_0)$"。

注意到 x_0 是 f 的定义区间中的任意一点，所以也可以就是 x，而 $f'(x)$ 也是 x 的函数，叫作 $f(x)$ 的导函数（derived function）（也叫一阶导数）。

导函数 $f'(x)$ 也是函数，如果 $f'(x)$ 在 x 处可导，则它的导数叫做 $f(x)$ 的二阶导数，记作 $f''(x)$。类似地，可设定义三阶导数 $f'''(x)$ 等等。

例 3 在初速度为零的匀加速运动中，路程 s 和时间 t 的关系为

$$s=s(t)=\frac{at^2}{2}.$$

（1）求 s 关于 t 的瞬时变化率，并说明其物理意义；

（2）求运动物体的瞬时速度关于 t 的瞬时变化率，说明其物理意义。

解 （1）s 关于 t 的瞬时变化率就是函数 $s(t)=\frac{at^2}{2}$ 的导数 $s'(t)$，按定义计算有

$$\frac{s(t+d)-s(t)}{d}=\frac{\frac{a(t+d)^2}{2}-\frac{at^2}{2}}{d}=\frac{a\left(td+\frac{d^2}{2}\right)}{d}=at+\frac{ad}{2},$$

当 d 趋于 0 时此式趋于 at，即 $s'(t)=at$.

从物理上看，s 关于 t 的瞬时变化率 at 就是运动物体的瞬时速度.

(2) 运动物体的瞬时速度关于 t 的瞬时变化率，事上就是函数 $s'(t)=at$的导数 $s''(t)$. 按定义计算有

$$\frac{s'(t+d)-s'(t)}{d}=\frac{a(t+d)-at}{d}=\frac{ad}{d}=a.$$

当 d 趋于 0 时，a 还是 a，所以$s''(t)=a$. 它是运动物体的加速度.

练 习

1. 求函数 $y=x^2-3x$ 在区间$[-1, 1]$上的平均变化率.
2. 设质点作直线运动，已知路程 s 是时间 t 的函数，$s=3t^2+2t+1$，求从 $t=2$ 到 $t=2+d$ 之间的平均速度，并求出当 $d=1$，$d=0.1$ 与 $d=0.01$ 时的平均速度，再求在 $t=2$ 时的瞬时速度.

习题 3

学而时习之

1. 求一次函数 $y=kx+b$ 的瞬时变化率.
2. 在初速为 v 的匀加速运动中，路程 L 和时间 x 的关系为 $L=L(x)=vx+\frac{ax^2}{2}$.

   (1) 求 L 关于 x 的瞬时变化率，并说明其物理意义；

   (2) 求运动物体的瞬时速度关于 x 的瞬时变化率，并说明其物理意义.
3. 当圆的半径 r 变化时，圆面积 A 关于 r 的瞬时变化率有什么几何意义？
   当圆的直径 D 变化时，圆周长 C 关于 D 的瞬时变化率有什么几何意义？

3.2 导数的运算

为了求运动物体的瞬时速度，要计算函数的导数.

为了作出曲线在一点处的切线，要计算函数的导数.

为了知道和评价事物变化的快慢和方向，要计算函数的导数.

在科学研究和工程技术活动中，大量问题的解决离不开导数的计算. 求函数的导数，和四则运算一样，如同家常便饭.

函数导数的计算是如此有用，如此重要. 这一节我们就来学习导数的计算方法和有关的运算公式.

3.2.1 几个幂函数的导数

让我们根据函数的导数的定义，计算几个简单的函数的导数.

(1) 最简单的函数是常数函数 $f(x)=c$.

这时，$f(x+d)=c$，$f(x+d)-f(x)=c-c=0$，所以

$$\frac{f(x+d)-f(x)}{d}=\frac{0}{d}=0.$$

当 d 趋于 0 时，0 当然趋于 0，这表明 $f'(x)=(c)'=0$，即

$$(c)'=0.$$

想一想，上面的等式的实际意义是什么?

(2) 若 $f(x)=x$，$f(x+d)=x+d$，于是

$$\frac{f(x+d)-f(x)}{d}=\frac{d}{d}=1,$$

即 $(x)'=1$.

几何意义是，直线 $y=x$ 的斜率为 1.

(3) 若 $f(x)=x^2$，你会求它的导数吗?

其实，前面我们计算过一般二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的导数，得到 $f'(x)=2ax+b$. 只要分别让数组 (a, b, c) 取值

$(0, 0, c)$和$(0, 1, 0)$就得到公式（1），（2），取值$(1, 0, 0)$时得到$(x^2)'=2x$.

（4）求函数 $f(x)=x^3$ 的导数，要多算一项：

$$\frac{f(x+d)-f(x)}{d}=\frac{(x+d)^3-x^3}{d}=\frac{3dx^2+3xd^2+d^3}{d}$$

$$=3x^2+3dx+d^2.$$

当 d 趋于 0 时，上式趋于 $3x^2$，所以$(x^3)'=3x^2$.

（5）如果 $f(x)=\frac{1}{x}$，如何计算 $f(x)$的导数？

还是按定义来算：

$$\frac{f(x+d)-f(x)}{d}=\frac{\frac{1}{x+d}-\frac{1}{x}}{d}=\frac{\frac{x-(x+d)}{x(x+d)}}{d}=\frac{-1}{x(x+d)}.$$

让 d 趋于 0，上式趋于$\frac{-1}{x^2}$，所以$\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{-1}{x^2}$.

我们将上述 5 个公式，总结列表如下，以后可以直接使用.

1. 常数函数导数为 0：$(c)'=0$
2. 恒等函数导数为 1：$(x)'=1$
3. $(x^2)'=2x$
4. $(x^3)'=3x^2$
5. $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

例 1 立方体的棱长 x 变化时，求其体积关于 x 的变化率是立方体表面积的多少倍.

解 立方体的体积 $V(x)=x^3$.

由 $V'(x)=(x^3)'=3x^2$，其体积关于 x 的变化率为 $3x^2$，是立方体表面积的 0.5 倍.

例 2 写出过点 $A(-4, 2)$并且和曲线 $xy-1=0$ 相切的两条直线的方程.

解 经验算知点 A 不在该曲线上. 设所求的切线和曲线切于点

$Q(u, v)$，由 $uv-1=0$ 容易求出 $v=\frac{1}{u}$.

把该曲线的方程写成函数 $y=\frac{1}{x}$ 的形式，则 $y'=-\frac{1}{x^2}$. 可见在点 Q 处切线的斜率为 $k=-\frac{1}{u^2}$.

计算线段 AQ 的斜率，得到方程 $\frac{v-2}{u+4}=-\frac{1}{u^2}$，将 $v=\frac{1}{u}$ 代入并整理得到关于 u 的二次方程：

$$u^2-u-2=0.$$

解得 $u=-1$ 或 $u=2$，说明这样的切线可能有两条.

继续计算，对应的两个切点的坐标为 $(-1, -1)$ 和 $\left(2, \frac{1}{2}\right)$；两条切线的斜率分别为 -1 和 $-\frac{1}{4}$，对应的点斜式方程分别为 $y-2=-(x+4)$ 和 $y-2=\left(-\frac{1}{4}\right)(x+4)$，如图 3-7.

求曲线上点 P 处的切线与求过点 P 的切线有区别，在点 P 处的切线，点 P 必为切点；过点 P 的切线，点 P 未必是切点.

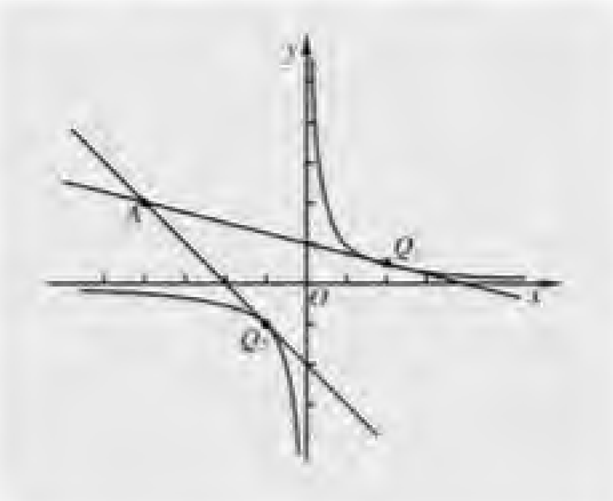


图 3-7

练 习

1. 正方形的边长 x 变化时，其面积关于 x 的变化率是正方形周长的多少倍?

2．求曲线 $x^3-y=0$ 在点（2，8）处的切线的方程．

习题 4

学而时习之

1．质点的运动方程是 $s=t^2$（s 的单位：m；t 的单位：s），求质点在 $t=3$ 时的速度．

2．求过点 $P(3,5)$ 且与曲线 $y=x^2$ 相切的直线方程．

3．曲线 $y=x^3$ 在点 P 的切线斜率为3，求点 P 的坐标．

温故而知新

4．写出过点 $A(-5,3)$ 并且和曲线 $xy=1$ 相切的两条直线的方程．

5．把 y 看成 x 的函数，计算曲线 $x-y^2=0$ 在点 $A(4,2)$ 处切线的斜率．再把 x 看成 y 的函数进行计算，对比两次计算的结果．

6．从 x，x^2，x^3 的导数公式，你能找出规律，猜到 $\frac{1}{x}$ 和 $\sqrt{x}$ 的导数吗？

3.2.2 一些初等函数的导数表

我们已经知道了 x，x^2，x^3 和 $\frac{1}{x}$ 这几个幂函数的导数.

那么，一般的幂函数 x^a 的导数如何计算呢？

还有，我们学过的指数函数、对数函数和三角函数，它们的导数又如何计算呢？

数学家早已解决了这些函数的求导问题，将来你学习更多的数学知识，也会掌握这些函数求导的道理. 现在，把这些函数的求导公式列表如下，便于应用.

一些基本的初等函数导数公式

（公式对函数定义域内的自变量 x 有效）

(1) $(c)'=0$

(2) $(x^a)'=ax^{a-1}$ $(a\neq0)$

(3) $(e^x)'=e^x$

(4) $(a^x)'=a^x(\ln a)$ $(a>0，a\neq1)$

(5) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ $(x>0)$

(6) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$ $(a>0，a\neq1，x>0)$

(7) $(\sin x)'=\cos x$

(8) $(\cos x)'=-\sin x$

(9) $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$

(10) $(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

例 1 曲线 $y=\sin x$ 在哪些点的切线斜率为 1？在哪些点的切线平行于 x 轴？

解 因 $y'=\cos x$，故该曲线在点 $(x,\sin x)$ 处的切线斜率为 $\cos x$.

方程 $\cos x=1$ 的解集为 $\{x=2k\pi \mid k\in \mathbf{Z}\}$，即当 x 为 2π 的整数倍时该曲线的切线斜率为 1．$\cos x=0$ 的解集为 $\left\{x=k\pi+\frac{\pi}{2} \mid k\in \mathbf{Z}\right\}$，故当 x 为 $\frac{\pi}{2}$ 加上 π 的整数倍时该曲线的切线斜率为 0，即切线平行于 x 轴．

例 2 用导数公式表计算：

（1）$(\sqrt[3]{x^2})'$；（2）$(\log_2 x)'$；（3）$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$．

解 （1）$(\sqrt[3]{x^2})'=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$；（2）$(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}$；

（3）$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$．

练 习

曲线 $y=\cos x$ 在哪些点的切线斜率为 1？在哪些点的切线平行于 x 轴？

习题 5

学而时习之

1．用导数公式表求下列函数的导数：

（1）$y=x^5$；（2）$y=x^8$；

（3）$x=\sin \theta$；（4）$u=\cos \varphi$．

2．曲线 $y=x^n$（n 是正整数）在 $x=2$ 处的导数为 12，求 n 的值．

3．水平放置的弹簧一端固定，另一端连接一小球，弹簧振动时，小球在光滑的桌面上作往复运动，运动方程为 $x=\sin t$．求小球在平衡点（$x=0$）和回复点的瞬时速度．

4．用导数公式表计算：

（1）$(\sqrt{x^3})'$；（2）$(\log_a x)'$；（3）$\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'$．

3.2.3 导数的运算法则

我们已经知道了几个函数的导数．从这几个函数出发，经过加减乘除，可以得到更多的函数．相应地，从这几个函数的导数出发，能不能经过加减乘除得到更多函数的导数呢？

1．前面计算过函数 $y=x^2$ 的导数，也计算过函数 $y=3x^2$ 的导数（那时用的自变量是 t，t 相当于这里的 x），后者的导数恰好是前者导数的 3 倍．这里是不是有更一般的规律呢？$F(x)=cf(x)$ 的导数，是不是 $f'(x)$ 和数 c 的乘积呢？

用定义计算，$\frac{cf(x+d)-cf(x)}{d}=c\left(\frac{f(x+d)-f(x)}{d}\right)$．当 d 趋于 0 时，$\left(\frac{f(x+d)-f(x)}{d}\right)$ 趋于 $f'(x)$，前面的式子应当趋于 $cf'(x)$．可见，函数常数倍的导数，等于函数导数的同样的常数倍．这个运算法则写成公式就是

$$(cf(x))'=cf'(x).$$

2．前面计算过函数 $H(t)=-4.9t^2+6.5t+10$ 的导数．检查一下，结果是不是等于 $(-4.9t^2)$，$6.5t$ 和 10 这三项的导数之和呢？

一般说来，和函数 $u(x)=f(x)+g(x)$ 的导数，等于两函数的导数和．

用定义计算，

$$\begin{aligned}\frac{u(x+d)-u(x)}{d}&=\frac{f(x+d)+g(x+d)-(f(x)+g(x))}{d}\\&=\frac{f(x+d)-f(x)}{d}+\frac{g(x+d)-g(x)}{d}.\end{aligned}$$

当 d 趋于 0 时，两项分别趋于 $f'(x)$ 和 $g'(x)$，其和就趋于 $f'(x)+g'(x)$．写成公式就是

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x).$$

类似地有

$$(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x).$$

想一想，三个或更多函数的和函数的导数计算，类似的法则该如何表示呢？

例1 求曲线 $y=f(x)=2x^3-x^2-3x+1$ 和直线 $x=1$ 交点处切线的斜率 k.

解 求 y 对变量 x 的导数：

$y'=f'(x)=6x^2-2x-3$.

将 $x=1$ 代入得

$f'(1)=6-2-3=1$.

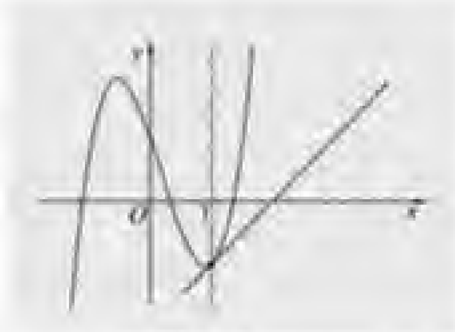


图 3-8

所以曲线和直线 $x=1$ 交点处切线的斜率 $k=1$（图 3-8）.

3. 设 $F(x)=f(x)g(x)$. 为计算 $F'(x)$，写出

$$\frac{F(x+d)-F(x)}{d}=\frac{f(x+d)g(x+d)-f(x)g(x)}{d}$$

$$=\frac{f(x+d)g(x+d)-f(x+d)g(x)+f(x+d)g(x)-f(x)g(x)}{d}$$

$$=\frac{f(x+d)g(x+d)-f(x+d)g(x)}{d}+\frac{f(x+d)g(x)-f(x)g(x)}{d}$$

$$=f(x+d)\left(\frac{g(x+d)-g(x)}{d}\right)+g(x)\left(\frac{f(x+d)-f(x)}{d}\right).$$

当 d 趋于 0 时，$f(x+d)$ 趋于 $f(x)$，$\frac{g(x+d)-g(x)}{d}$ 趋于 $g'(x)$，$\frac{f(x+d)-f(x)}{d}$ 趋于 $f'(x)$.

所以得到 $F'(x)=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$，即运算法则

$$(f(x)g(x))'=f(x)g'(x)+g(x)f'(x).$$

例2 求函数 $f(x)=(2x^2+3)(3x-2)$ 的导数.

解 $f'(x)=(2x^2+3)'(3x-2)+(2x^2+3)(3x-2)'$

$=4x(3x-2)+(2x^2+3)\cdot 3$

$=18x^2-8x+9$.

猜一猜，如果知道了 $f'(x)$ 和 $g'(x)$，是不是有 $(f(x)g(x))'=f'(x)g'(x)$ 呢？

用具体例子试试看，让 $f(x)=x$，$g(x)=x$，有 $(f(x)g(x))'=f'(x)g'(x)$ 吗？

想想看，我们也不知道这个方便的公式，还是从定义出发，老老实实地推导吧。

4. 设 $F(x)=\frac{1}{f(x)}$ $(f(x)\neq 0)$，

则 $$\frac{F(x+d)-F(x)}{d}=\frac{\frac{1}{f(x+d)}-\frac{1}{f(x)}}{d}$$

你也猜得到，不可能有 $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{1}{f'(x)}$，要从定义出发推算一下。

$$=\frac{1}{f(x)f(x+d)}\left(\frac{f(x)-f(x+d)}{d}\right).$$

让 d 趋于 0，得到 $F'(x)=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$，即运算法则

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}.$$

例 3 用上述法则求 $\frac{1}{x}$ 的导数.

解 设 $f(x)=x$，由 4 中的法则 $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$，这里 $f'(x)=(x)'=1$，又一次得到 $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

5. 把 3，4 结合起来，得到两函数之商的求导法则：

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f(x)g'(x)-g(x)f'(x)}{(f(x))^2}\ (f(x)\neq 0).$$

例 4 用两函数之商的求导法则计算 $y=\frac{x+3}{x^2+3}$ 的导数.

解 $y'=\frac{(x+3)'(x^2+3)-(x+3)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}$

$=\frac{x^2+3-(x+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$

$=\frac{-x^2-6x+3}{(x^2+3)^2}.$

导数运算法则表

1. $(cf(x))'=cf'(x)$
2. $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$

   $(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)$
3. $(f(x)g(x))'=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$
4. $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}\ (f(x)\neq 0)$
5. $\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f(x)g'(x)-g(x)f'(x)}{(f(x))^2}\ (f(x)\neq 0)$

练 习

1. 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=5+3x-2^x$；　　(2) $S(t)=3\sin t-6t+100$；

(3) $g(x)=\frac{7}{4x}-\frac{x^2}{3}$；　　(4) $W(u)=\frac{1}{u}-\sqrt{\pi u}$.

2. 计算：

(1) $(xe^x)'$；　　(2) $(2\sin(3+x))'$；

(3) $(3x^3e^x+2x^2e^x-e^x+7)'$；　　(4) $(x\tan(ax-1))'$；

(5) $((5x-e)^6)'$；　　(6) $\left(\frac{a-x}{a+x}\right)'$；

(7) $\left(\frac{1}{\cos x}-\sin x\tan x\right)'$.

3. 判断下列求导是否正确．如果不正确，加以改正．

(1) $[(3+x^2)(2-x^3)]'=2x(2-x^3)+3x^2(3+x^2)$；

(2) $\left(\frac{1+\cos x}{x^2}\right)'=\frac{2x(1+\cos x)+x^2\sin x}{x^4}$.

习题 6

学而时习之

1. 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=3-2x$；　　(2) $H(t)=-2t^2+6t-5$；

(3) $g(x)=3x^2-\frac{1}{4x^2}$；　　(4) $F(u)=u-\sqrt{5u}$；

(5) $p(x)=x^4-2x^3+3x^2+6x-1$；　　(6) $T(x)=\sin x-\cos x$；

(7) $u(x)=3e^x+2\tan(x)$；　　(8) $f(x)=\log_2 x+\cot x$.

2. 计算：

(1) $(x^2\ln x)'$；　　(2) $(x^2e^x\sin x)'$；

(3) $(2^x\tan x)'$；　　　　　　　　(4) $(\sqrt{x}\cos x)'$.

3. 物体的运动方程是 $s=-\frac{1}{6}t^3+2t^2-5$，求物体在 $t=3$ 时的速度.

4. 设曲线 $y=x^2+1$ 上一点 (x_0, y_0) 处的切线 l 平行于直线 $y=2x+1$.

(1) 求切点 (x_0, y_0)；

(2) 求切线 l 的方程.

温故而知新

5. 已知 $P(u, v)$ 是曲线 $(1+x^2)y-x=0$ 上的一点，写出该曲线在点 P 处的切线的方程，并分别求出切线斜率为 1 时和切线平行于 x 轴时对应的切点 P 的坐标.

6. 根据求导公式表和求导运算法则，找出满足下列等式的函数 $f(x)$：

(1) $(f(x))'=f(x)$；　(2) $(f(x))''=f(x)$；　(3) $(f(x))'''=f(x)$.

7.* 在我们的求导公式表中，有关指数函数、对数函数和三角函数的公式共有 8 个. 试在这 8 个公式中找出 3 个，利用导数运算法则从这 3 个推导出另外的 5 个.

数学实验

用计算机求函数的导数和作切线

由于求导运算在科技活动中有广泛的应用，人们编写了根据函数表达式计算导数的程序，便于快捷地求出函数的导数.

用“Z+Z 超级画板”可以计算函数的导数.

打开“超级画板”，在左面工作区下方单击“程序”按钮（图 3-9），打开程序工作区. 要计算函数 x^5+ax 关于 x 的导数，就在英文输入状态下键入：

Diff（x^5+a*x，x）;

然后按 Ctrl+Enter 键执行，则程序返回计算的结果：

≫5*x^4+a#

图 3-9

这里“Diff（,）;”是求导运算的命令形式. 在括号中的逗点前键入被求导的函数的表达式，逗点后键入有关的变量.

下面是几条求导命令的执行记录. 注意在求 $(5x+y)^5$ 关于 x 的导数时，结果是展开了的形式. 如果要表成乘幂的形式，要在求导之后进行因式分解，即添上一个 Factor 命令.

Diff(sin(x)+e^x，x);

≫(e)^x+cos(x)#

Diff(u*x,x);

≫u≠

Diff((5*x+y)^4, x);

≫$2500*x^3+1500*x^2*y+300*x*y^2+20*y^3$

Factor(Diff((5*x+y)^4, x));

≫$(2)^2*(5)*(5*x+y)^3$≠

Diff(3^x+x, x);

≫$(3)^x*\ln(3)+1$≠

Diff(ln(x),x);

≫$\frac{1}{x}$≠

Diff(tan(x), x);

≫$\sec^2(x)$≠

Diff(5*sin(a*x+b), x);

≫5*a*cos(a*x+b)≠

用免费下载的“Z+Z超级画板”，可以作上面的计算．用其中“文本作图”功能，还可以作函数曲线和切线：

(1) 执行菜单命令“作图｜文本作图”，打开文本作图对话框(图3-10)；

图3-10

（2）在对话框左下部分，单击“曲线”项目前的“+”号，展开命令单，双击命令单中的第1行，在上方栏里出现待填命令项 Function（，，，，）（图3－11）；

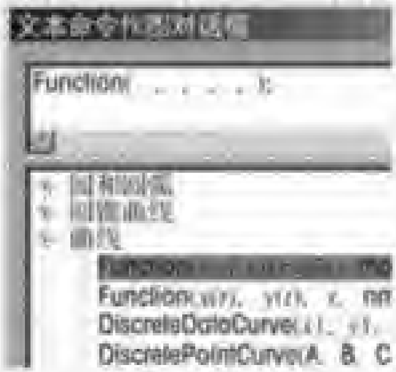


图3－11

（3）依次键入曲线方程 $y=x^\wedge 3/3-2*x^\wedge 2+2*x+1$，变量范围－6和6以及描点数100（图3－12）。

图3－12

单击对话框中右面的“运行命令”按钮，作出函数曲线（稍后运行也可）；

（4）单击“曲线”项目前的“－”号收缩曲线命令单，再单击“点”项目前的“+”号展开命令单，双击命令单中的第2行在上方栏里出现待填命令项 Point（，，，，，）；

（5）在第1个逗号前键入曲线上一点的横坐标 u，再依次键入纵坐标 $u^\wedge 3/3-2*u^\wedge 2+2*u+1$ 和 x 拖动参数 u，单击对话框中右面的“运行命令”按钮，作出曲线上一个点 A；

（6）单击“点”项目前的“－”号收缩曲线命令单，再单击“直线”项目前的“+”号展开命令单，双击命令单中的第8行，在上方栏里出现待填命令项 LineOfPointSlope（，，）；

（7）在第1个逗号前键入点 A 的标号6（在对话框右下部可以

查到点 A 的标号），再依次键入曲线在点 A 处切线的斜率，也就是函数导数在 $x=u$ 时的值 u^2−4*u+2，单击对话框中右面的“运行命令”按钮，作出曲线在点 A 处的切线（图 3－13）；

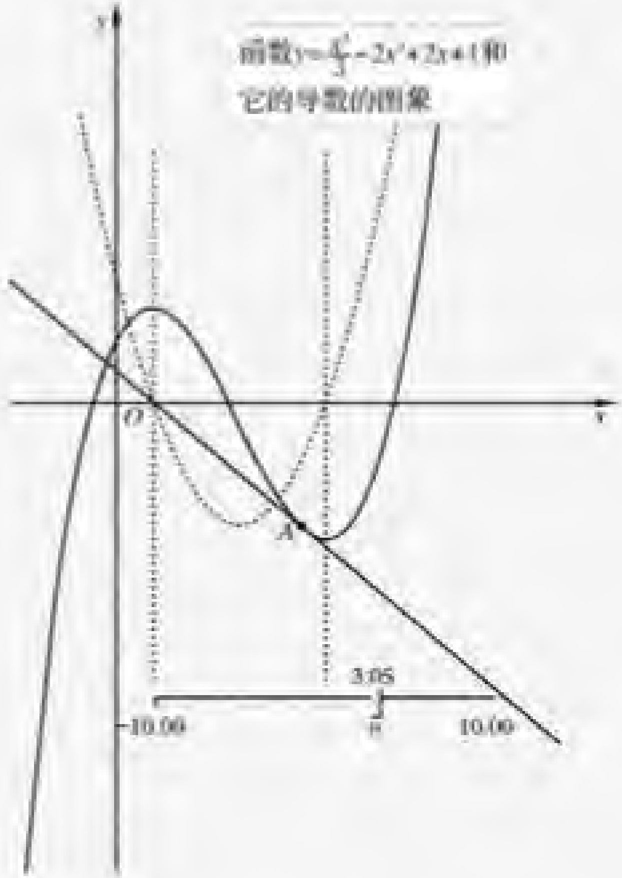


图 3－13

（8）单击“直线”项目前的“－”号收缩直线命令单，再单击“文本”项目前的“＋”号展开命令单，双击命令单中的第 5 行，在上方栏里出现待填命令项 Variable（.）；

（9）键入字母 u，单击“运行命令”按钮，作出 u 的变量尺，拖动变量尺上的滑钮，可以改变切点和切线；

（10）单击“文本”项目前的“－”号收缩文本命令单，再单击“圆锥曲线”项目前的“＋”号展开命令单，双击命令单中的倒 3 行，在上方栏里出现待填命令项

ConicOfEquation（.）；

(11) 键入函数导数的方程如下图(图3－14)；

图3－14

单击“运行命令”按钮，作出函数导数的图象(图中的虚线抛物线)；

(12) 单击对话框右上角关闭对话框；

(13) 用智能画笔功能作出抛物线和 x 轴的两个交点，并分别过两交点作出平行于 y 轴的两条直线；

(14) 两条直线分别把两条曲线分成3段，仔细观察，粗黑曲线的3段有何特点？虚线曲线的3段有何特点？从这里观察到的现象，能看出函数的增减和它的导数的正负有联系吗？

3.3 导数在研究函数中的应用

3.3.1 利用导数研究函数的单调性

在图3-13中，画出了一个函数$y=f(x)$和它的导函数$y=f'(x)$的曲线．其中导函数的曲线和x轴有两个交点．分别过两个交点作平行于y轴的直线，两条直线把图象分成左、中、右三部分．分别观察每部分中的两段曲线，可以发现函数和它的导函数的性质之间的某些关联．

左边，函数递增，导数为正；

中间，函数递减，导数为负；

右边，函数递增，导数又为正．

是不是函数的增减和它的导数的正负之间有确定的联系呢？

让我们观察更多的图象．

图3-15是$y=\sin x$和它的导函数$y=\cos x$的图象；图3-16是$y=x^2-3x$和它的导函数$y=2x-3$的图象；图3-17是$y=e^x-x$和它的导函数$y=e^x-1$的图象；图3-18是$y=x\cos x$和它的导函数$y=\cos x-x\sin x$的图象．

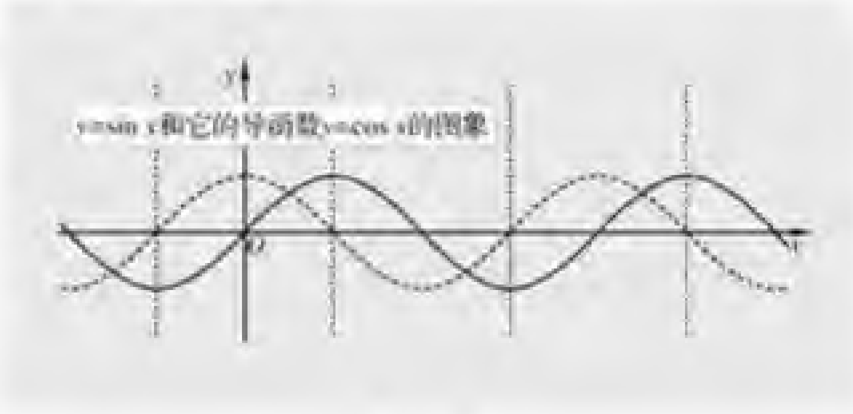


图3-15

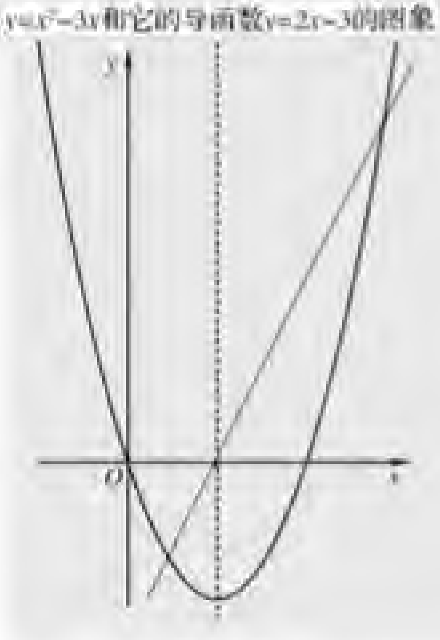


图 3-16

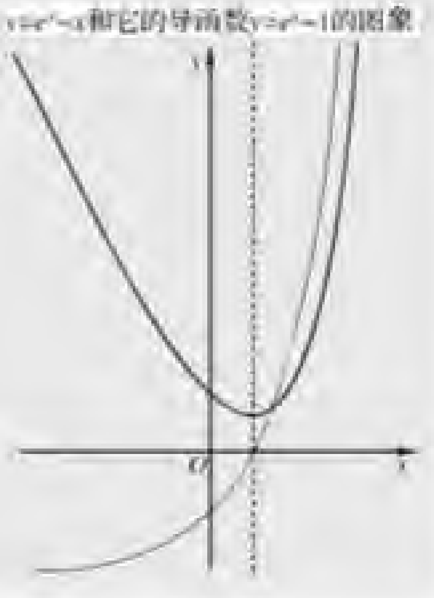


图 3-17

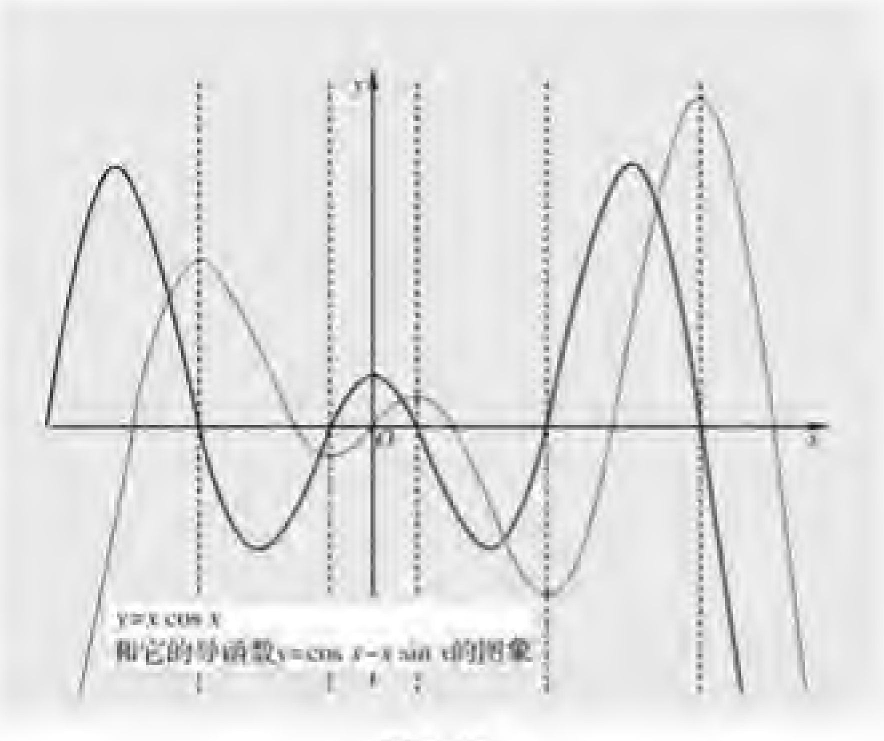


图 3-18

通过对这些例子的观察，我们发现好像有这样的法则：

如果在一个区间内，函数 $f(x)$的导数 $f'(x)>0$，则 $f(x)$递增；

如果在一个区间内，函数 $f(x)$的导数 $f'(x)<0$，则 $f(x)$递减．

可以严格地证明，上面从观察实例中归纳出来的规律确实是数学上的定理。为此就需把导数概念建立在严格的极限理论和实数理论基础之上，这里，只需了解和应用这个规律就够了。

虽然暂时不能证明，我们还是可以从直观上理解这个规律．

其实不奇怪，导数本来就是从差分与步长的比变来的，它继承了差分的性质，是合情合理的.

可是，由于在差分的表达式里多了个参数，讨论差分的正负就比较麻烦. 差分转化为导数，由于取极限的手段而摆脱了一些繁琐而本质上无关大局的细节，讨论起来就方便多了.

原来，我们是如何判断一个函数的增减性呢？

我们有一个有效的工具，叫作差分. 用差分判断函数的增减性，所用的法则是：

如果在一个区间内，函数 $f(x)$ 的差分 $(f(x+h)-f(x))>0$，则 $f(x)$ 递增；

如果在一个区间内，函数 $f(x)$ 的差分 $(f(x+h)-f(x))<0$，则 $f(x)$ 递减.

对比一下，用导数的正负判断函数的增减性的法则，比起用差分的正负判断函数的增减性的法则有何不同？

唯一的不同，就是在法则中用导数取代了差分.

例 1 用导数研究二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的增减性.

解 求出 $f(x)$ 的导数 $f'(x)=2ax+b$，分两种情形：

若 $a>0$，则 $f'(x)$ 在 $\left(-\infty,\ -\dfrac{b}{2a}\right)$ 上为负，在 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ +\infty\right)$ 上为正. 故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ -\dfrac{b}{2a}\right)$ 上递减，在 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ +\infty\right)$ 上递增.

若 $a<0$，则 $f'(x)$ 在 $\left(-\infty,\ -\dfrac{b}{2a}\right)$ 上为正，在 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ +\infty\right)$ 上为负. 故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ -\dfrac{b}{2a}\right)$ 上递增，在 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ +\infty\right)$ 上递减.

这个结论我们早就知道，但现在得来全不费工夫！

导数的正负对应着函数的增减，导数的绝对值大小和函数的性态又有什么关系呢？

路程对时间的导数是瞬时速度. 瞬时速度的绝对值大说明跑得快，绝对值小说明跑得慢.

函数的导数就是函数值关于自变量的变化率. 变化率的绝对值大说明变得快，绝对值小说明变得慢.

从函数的图象上来看，导数是切线的斜率. 斜率的绝对值大说明切线陡，曲线也就陡. 斜率的绝对值小说明切线较平，曲线也就平缓一些.

回过头去再看看图 3－18，是不是这样？

例 2　如图 3－19，圆 C 和直角 AOB 的两边相切，直线 OP 从 OA 处开始，绕点 O 匀速旋转（到 OB 处为止）时，所扫过的圆内阴影部分的面积 S 是时间 t 的函数，它的图象大致如图 3－20 中的（　　）．

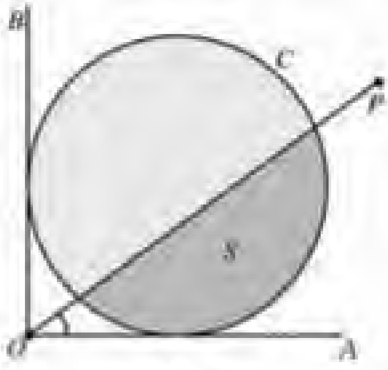


图 3－19

从图 3－18 到 3－19，你能看出更多的问题．

导数的正负对应着函数的增减，导数的增减说明什么呢？

导数增加，就是曲线上切线的斜率增加，则导数的几何意义又是什么呢？

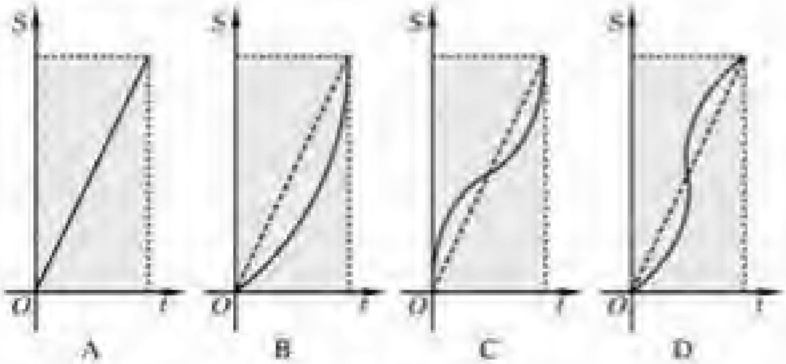


图 3－20

解　当直线转动时，若某时刻直线被圆所截得的弦较长，S 的瞬时变化率就较大，此处的导数也较大，图象中这里的切线就较陡，曲线就较陡．所以曲线开始由平缓变陡；到过程进行到一半时，截得的弦最大，曲线最陡；以后弦又渐渐变短，曲线由陡变缓．4 个图中只有 D 具有上述特点，所以选 D．

此题的真实图象见图 3－21．

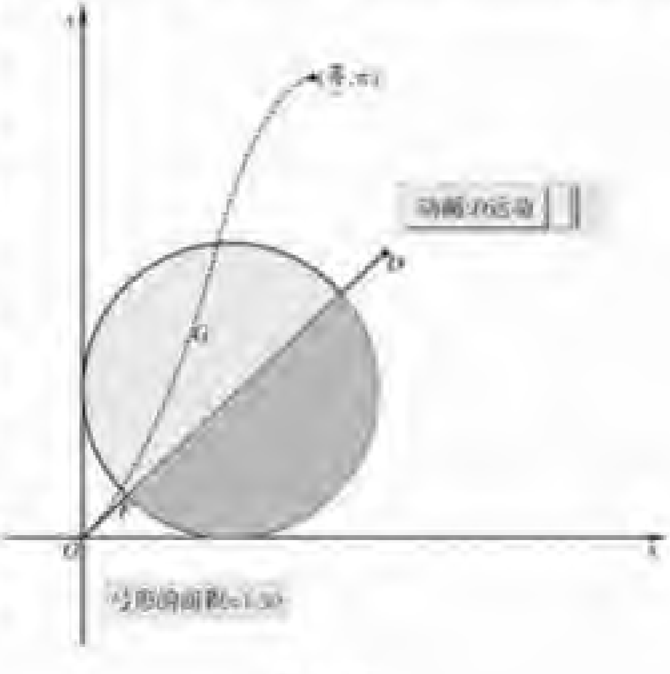


图 3－21

练 习

1. 求下列函数的导数，并根据导数的正负指出函数的递增和递减区间.

(1) $f(x)=3-2x$；　　(2) $f(x)=1-\frac{2}{x}$；

(3) $f(x)=x+\frac{1}{x}$；　　(4) $f(x)=x-2\sqrt{x}$.

习题 7

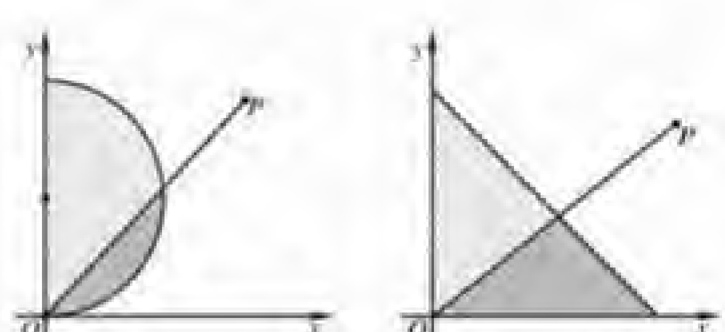
学而时习之

1. 求下列函数的导数，有条件时，可用计算机或计算器计算并作图来检验答案.

(1) $f(x)=e^x\sin x$；　　(2) $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$；

(3) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$；　　(4) $f(x)=x(x-1)(x-2)$.

2. 若把例 2 中的圆改成如图 3－22（a）中的半圆，正确的答案是哪个？如果改成如图 3－22（b）中的三角形呢？



(a)　　(b)

图 3－22

3. 求证：函数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$ 在区间$(-2,1)$内是减函数.

3.3.2 函数的极大值和极小值

大量实际问题要求确定某些函数的最大值或最小值以及对应的最大值点或最小值点，这类问题统称为最值问题．对于二次函数，我们早已掌握了最值问题的求解方法．

如果 $x=c$ 是函数 $y=f(x)$ 在某个开区间 (u, v) 上的最大值点，即不等式 $f(c) \geqslant f(x)$ 对一切 $x \in (u, v)$ 成立，就说函数 $f(x)$ 在 $x=c$ 处取到极大值 $f(c)$，并称 c 为 $f(x)$ 的一个极大值点，$f(c)$ 为 $f(x)$ 的一个**极大值** (maximun value)．

类似地，如果 $x=c$ 是函数 $y=f(x)$ 在某个开区间 (u, v) 上的最小值点，即不等式 $f(c) \leqslant f(x)$ 对一切 $x \in (u, v)$ 成立，就说函数 $f(x)$ 在 $x=c$ 处取到极小值 $f(c)$，并称 c 为 $f(x)$ 的一个极小值点，$f(c)$ 为 $f(x)$ 的一个**极小值**(minimun value)．

极大值和极小值统称**极值** (extreme value)．极大值点和极小值点统称极值点．

找出了一个函数所有的极值和极值点，最值问题也就迎刃而解．

如果 $f(x)$ 在 $(u, c]$ 上递增，在 $[c, v)$ 上递减，它当然在 $x=c$ 处取到极大；反过来，如果在 $(u, c]$ 上递减，在 $[c, v)$ 上递增，它在 $x=c$ 处取到极小．

函数在极值点如果有导数则必为 0，这是微积分学的一条基本定理，叫作费马定理．

由导数的正负可以判断函数的增减，确有助于找出函数的极值和极值点．但是，有没有更简便的办法呢？

观察图 3－13 到图 3－18，函数的极值点是导数的什么点？

原来都是导数的零点．

这是不是一般法则呢？

看图 3－23，如果函数在某个区间内有极大值，将一条平行于 x 轴的直线从上方渐渐向下平移，直到碰上曲线（在这个区间上的一段）就停下来．这样，直线停下来时的高度，也就是曲线在这个区间内所达到的最高点，这时这条直线就是曲线的这个局部最高点处的切线．

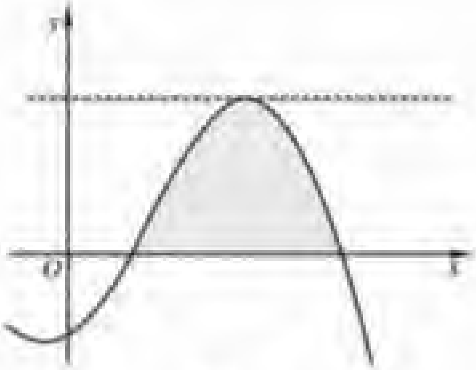


图 3－23

也就是说，如果函数的曲线在局部最高点处有切线，这切线应当和 x 轴平行.

换句话说，函数在极大值点的导数为 0.

同样的道理，函数在极小值点的导数也为 0.

总之，函数在极值点的导数为 0.

当然，这里的前提是函数在极值点有导数.

例如 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处取到极小，但是 $f'(0)$ 不存在，就谈不到 $f'(0)=0$.

反过来，导数的零点是否一定是函数的极值点呢?

从我们观察过的函数图象 3－13 到 3－18 中，导数的零点确实都是函数的极值点. 但如果要认定这是一般的规律，还得想想道理. 刚才设想将一条平行于 x 轴的直线向下平移来碰曲线，就是在想道理，或者说在做"思想试验".

在我们观察过的图象中，导函数的曲线都是在穿过 x 轴时取到零点的. 也就是在由正变负或由负变正时取到零点的.

函数的导数由正变负，函数本身就由增变减，中间就会有极大值点；函数的导数由负变正，函数本身就由减变增，中间就会有极小值点. 这样想，就抓住了要害.

导数在零点处确实常常改变符号，但会不会有例外的不改变符号的情形呢? 曲线会不会和 x 轴碰一下就回头，并不穿过 x 轴呢?

有这样的情形. 和 x 轴相切的二次曲线就是这样.

更具体一些，函数 $y=(x-a)^2$ 的曲线就是如此. 此函数在 $x=a$ 处取到 0，但不变号.

问题逐渐水落石出. 如果一个函数的导数在零点处不变号，导数的这个零点就可能不是该函数的极值点. 如图 3－24，函数 $y=x^3$ 是

递增函数，没有极值点．但它的导函数 $y=3x^2$ 有零点．

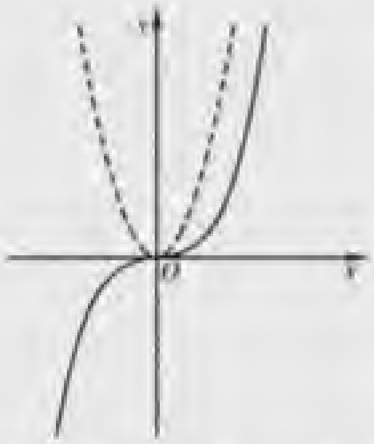


图 3－24

可见，导数的零点可能不是函数的极值点．

也就是说，若 $f'(c)$ 存在，$f'(c)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=c$ 处取到极值的必要条件，但不是充分条件．

驻点，就是好比行军途中休息之处．至于休息之后继续前进还是回头后撤，是另一回事．

当然，这都先要假定提到的导数存在．

通常地，若 $f'(c)=0$，则 $x=c$ 叫作函数 $f(x)$ 的驻点．

一个函数的驻点，再加上什么条件，才能保证它是极值点呢？

这条件刚才已经想到了，就是导数在这个点两侧要变号．导数的图象曲线在这里要穿过 x 轴．

一般地，如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间有导数，就可以采用如下的方法求它的极值：

（1）求导数 $f'(x)$；

（2）求 $f(x)$ 的驻点，即求 $f'(x)=0$ 的根；

（3）检查 $f'(x)$ 在驻点左右的符号，如果在驻点左侧附近为正，右侧附近为负，那么函数 $y=f(x)$ 在这个驻点处取得极大值；如果在驻点的左侧附近为负，右侧附近为正，那么函数 $y=f(x)$ 在这个驻点处取得极小值．

讨论极值点，导数的方法最简单．

例 1　求函数 $f(x)=x+\sin x$ 的驻点和极值点．

解　求得 $f'(x)=1+\cos x$，方程 $1+\cos(x)=0$ 的解集就是 $f(x)$ 的驻点之集：

$$\{x=(2k+1)\pi \mid k\in \mathbf{Z}\}.$$

观察 $f'(x)=1+\cos x$ 的符号有助于进一步的分析. 由于 $1+\cos x$ 在任意两个相邻的驻点之间恒大于 0，即 $f(x)$ 在任意两个相邻的驻点之间递增，所以没有极值（图 3－25）.

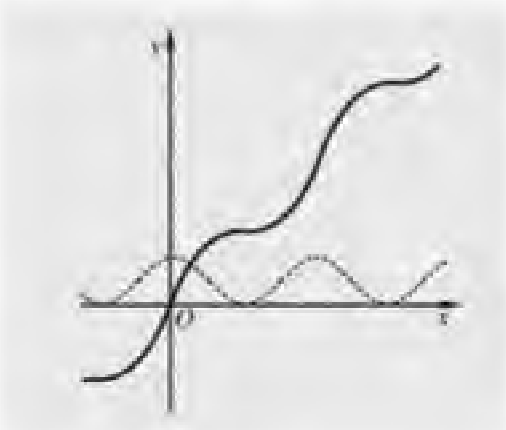


图 3－25

例 2 求函数 $g(x)=x^2(3-x)$ 的极大值和极小值.

解 求得 $g'(x)=6x-3x^2$，解方程 $6x-3x^2=0$ 得驻点 $x=0$ 和 $x=2$.

$g'(x)$ 在驻点左右的符号如下表所示：

x	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	$+$	$-$

故 $g(x)$ 有极大值点 $x=2$，对应的极大值为 $g(2)=4$；

$g(x)$ 有极小值点 $x=0$，对应的极小值为 $g(0)=0$(图 3－26).

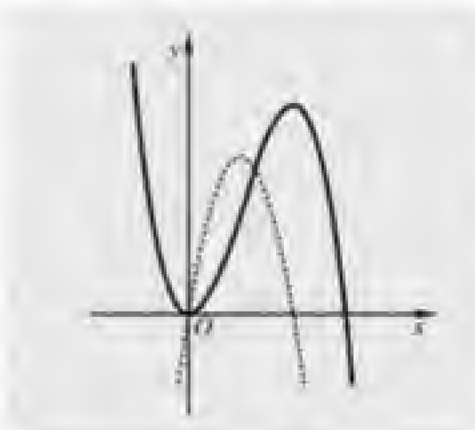


图 3－26

练 习

1. 求下列函数的驻点、极值点和对应的极值，有条件时用计算机或计算器作图对照。

(1) $f(x)=2x^2-6x+1$；　　(2) $g(x)=\cos x+\frac{x}{2}$；

(3) $f(x)=2x^3+3x^2+6x-7$；　　(4) $h(x)=x^2e^x$.

2. 如果 $f'(c)=0$ 且 $f''(c)=0$，$f(x)$在 $x=c$ 处能够取到极值吗？

3.3.3 三次函数的性质:单调区间和极值

我们曾经用配方法、差分法和导数法探讨过二次函数的性质，其中导数方法最为简便快捷.

利用函数的导数来研究函数的性质，不但便捷，而且具有一般性. 只要能算出函数的导数并求出导函数的零点，便能把该函数的单调区间和极大极小值点一一列出，做到一目了然.

三次函数的导数是二次函数. 二次函数的零点是容易求出的. 所以，用导数方法可以彻底了解三次函数的增减变化和极大极小.

我们曾经用差分方法研究过一些具体的三次函数的单调性；在本章中也有过有关三次函数的图象、例题和练习. 现在可以居高临下，讨论一般的不超过三次的多项式函数了.

设 $F(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，如果 $a=0$，$F(x)$ 可能是二次函数、一次函数或常函数，可结合前节的例题，总结出方法和结论.

根据学过的知识，情形1的充要条件是 $4b^2-12ac<0$，即 $b^2<3ac$.
情形2的充要条件是 $b^2=3ac$.
情形3的充要条件是 $b^2>3ac$.

以下设 $a\neq0$，则 $F'(x)=3ax^2+2bx+c$ 是二次函数，可能有三种情形：

情形 1 函数 $F'(x)$ 没有零点，$F'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不变号.

若 $a>0$，$F'(x)$ 恒正，$F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上递增；

若 $a<0$，$F'(x)$ 恒负，$F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上递减.

情形 2 函数 $F'(x)$ 有一个零点 $x=w$，根据二次函数的性质：

若 $a>0$，$F'(x)$ 在 $(-\infty,w)\cup(w,+\infty)$ 上恒正，$F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上递增；

若 $a<0$，$F'(x)$ 在 $(-\infty,w)\cup(w,+\infty)$ 上恒负，$F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上递减.

情形 3 函数 $F'(x)$ 有两个零点 $x=u$ 和 $x=v$，设 $u<v$.

这些方法适用于其他可求导的函数.
重要的是方法，结论不必记忆.

根据二次函数的性质：

若 $a>0$，$F'(x)$ 在 $(-\infty,u)$ 和 $(v,+\infty)$ 上为正，在 (u,v) 上为负；

对应地，$F(x)$ 在 $(-\infty,u)$ 上递增，在 (u,v) 上递减，在 $(v,+\infty)$

上递增.

可见 $F(x)$ 在 $x=u$ 处取极大值，在 $x=v$ 处取极小值.

若 $a<0$，$F'(x)$ 在 $(-\infty,\ u)$ 和 $(v,\ +\infty)$ 上为负，在 $(u,\ v)$ 上为正；

对应地，$F(x)$ 在 $(-\infty,\ u)$ 上递减，在 $(u,\ v)$ 上递增，在 $(v,\ +\infty)$ 上递减.

可见 $F(x)$ 在 $x=u$ 处取极小值，在 $x=v$ 处取极大值.

例 1　指出下列函数的单调区间和极值点.

(1) $f(x)=x^3-2x^2+2x-7$；

(2) $g(x)=-3x^3+6x^2-4x+5$；

(3) $u(x)=x^3-12x+8$；

(4) $h(x)=-37+36x-3x^2-2x^3$.

解　(1) 求得 $f'(x)=3x^2-4x+2$.

由于 $f'(x)$ 恒正，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上递增（图 3-27）.

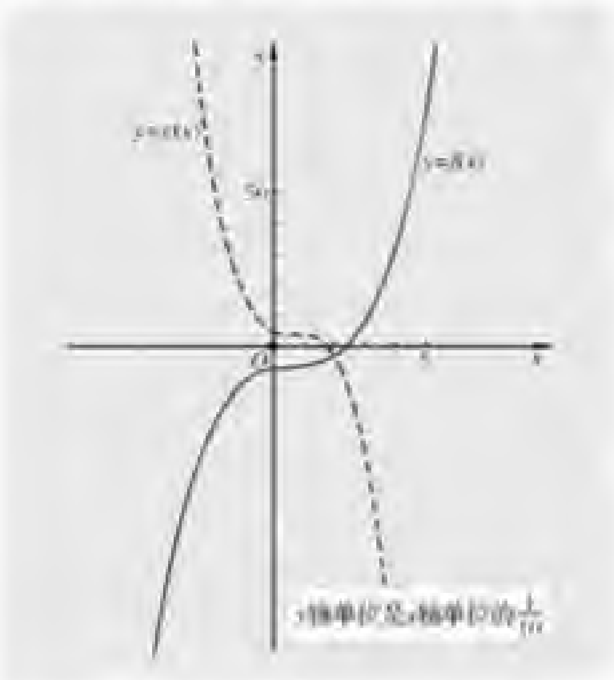


图 3-27

(2) 求得 $g'(x)=-9x^2+12x-4=-(3x-2)^2$.

由于 $g'(x)$ 在 $\left(-\infty,\ \dfrac{2}{3}\right)$ 和 $\left(\dfrac{2}{3},\ +\infty\right)$ 上均为负，

故 $g(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ 和 $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ 上均递减，

从而 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上递减（图 3-27）.

(3) $u'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$.

$u'(x)$ 有两个零点 $x=-2$ 和 $x=2$；

$u'(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上为正，在 $(-2, 2)$ 上为负，在 $(2, +\infty)$ 上为正.

对应地，$u(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上递增，在 $(-2, 2)$ 上递减，在 $(2, +\infty)$ 上递增.

因此 $u(x)$ 在 $x=-2$ 处取到极大，在 $x=2$ 处取到极小（图3-28）.

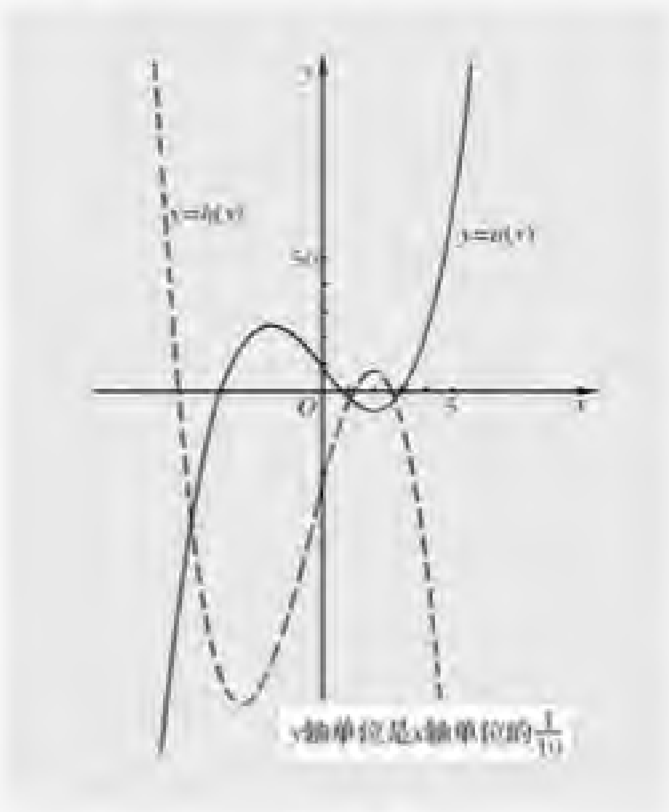


图 3-28

(4) $h'(x)=36-6x-6x^2=6(6-x-x^2)=6(2-x)(3+x)$.

$h'(x)$ 有两个零点 $x=-3$ 和 $x=2$；

$h'(x)$ 在 $(-\infty, -3)$ 上为负，在 $(-3, 2)$ 上为正，在 $(2, +\infty)$ 上为负.

对应地，$u(x)$ 在 $(-\infty, -3)$ 上递减，在 $(-3, 2)$ 上递增，在 (2,

$+\infty)$ 上递减.

因此 $u(x)$ 在 $x=-3$ 处取到极小，在 $x=2$ 处取到极大(图 3－28).

例 2 求函数 $F(x)=x^3-4x^2+2x+5$ 在 $[-1, 3]$ 上的最大值和最小值.

解 $F'(x)=3x^2-8x+2$.

$F'(x)$ 有两个零点：

$$x_1=\frac{4-\sqrt{10}}{3}=0.279\ 24\cdots$$

$$x_2=\frac{4+\sqrt{10}}{3}=2.387\ 4\cdots$$

容易看出，$F'(x)$ 在区间 (x_1, x_2) 内为负，在区间 (x_1, x_2) 外为正.

所以 $F(x)$ 在 x_1 处取到极大值 $F(x_1)=5.268\ 35\cdots$

在 x_2 处取到极小值 $F(x_2)=0.583\ 50\cdots$

两个极值点都在所考虑的区间 $[-1, 3]$ 之内，将此极大极小值与 $F(-1)=-2$ 和 $F(3)=2$ 比较，可知 $F(x)$ 在 $[-1, 3]$ 的最大值是 $F(x_1)=5.268\ 35\cdots$，最小值是 $F(-1)=-2$（图 3－29）.

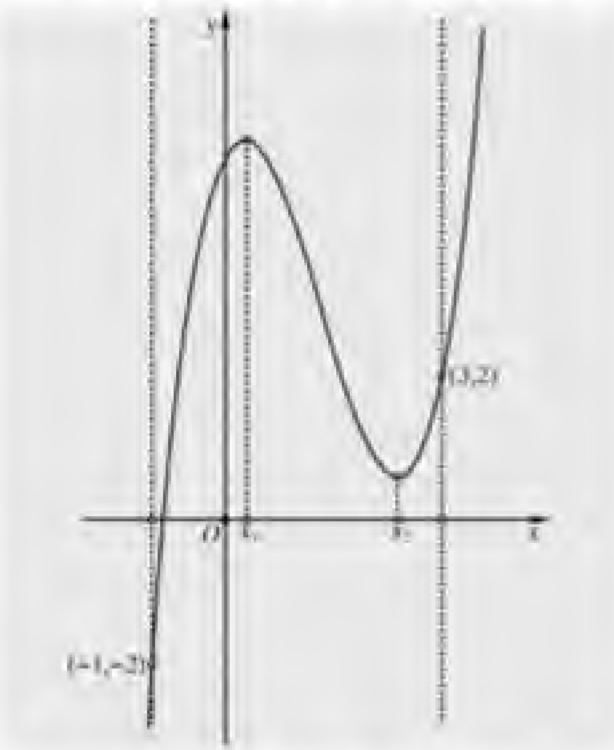


图 3－29

练 习

1. 指出下列函数的单调区间和极值点.

(1) $f(x)=x^3-3x^2+2x-2$;

(2) $g(x)=-3x^3+5x^2-4x+11$;

(3) $u(x)=-x^3+27x+7$;

(4) $h(x)=42-15x-3x^2+x^3$.

2. 求函数 $F(x)=4-3x+6x^2-2x^3$ 在 $[-1, 2]$ 上的最大值和最小值.

3. 讨论函数 $f(x)=x^2+ax+5$ 的增减性.

习题 8

学而时习之

1. 求下列函数的导数，并根据导数的正负指出函数的递增、递减区间和极大极小值.

(1) $f(x)=5x-3$;

(2) $f(x)=\frac{x}{1+x}$;

(3) $f(x)=x-\frac{1}{x}$;

(4) $g(x)=x^2-2x-3$;

(5) $f(x)=x^{2n}$;

(6) $f(x)=\ln x+x$;

(7) $g(x)=\frac{x}{2+x^2}$;

(8) $g(x)=x(x+1)(x-3)$;

(9) $g(x)=e^x\cos x$;

(10) $g(x)=x+2\sin x$;

(11) $h(x)=2x^3-3x^2+x-5$;

(12) $u(x)=5-3x+2x^2-x^3$.

2. 求下列函数在指定的闭区间上的最大值和最小值.

(1) $F(x)=2x^3-17x^2+42x-28$, $[1, 5]$;

(2) $G(x)=e^x(x^2-4x+3)$, $[-3, 2]$.

温故而知新

3．设 $P(-5, u)$，$Q(0, v)$ 是曲线 $y=x^2+5x-4$ 上的两点．(1) 作出与 PQ 平行的曲线的切线；(2) P，Q 之间的这段曲线是不是夹在切线和直线 PQ 之间？你能说明其中的道理吗？

4．已知 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上有导数 $F'(x)$ 和二阶导数 $F''(x)$，并且 $F''(x)>0$；分别记曲线的两端点 $(a, F(a))$，$(b, F(b))$ 为 A、B．问下列三种情形中哪种是对的？

(1) 曲线在线段 AB 的下方；

(2) 曲线在线段 AB 的上方；

(3) 曲线穿过线段 AB．

3.4 生活中的优化问题举例

在日常生活、生产建设和科技活动中，做一件事总要付出一定的代价，也总想取得一定的效果.

在付出代价一定的条件下，我们总想取得最好的效果；在预期效果确定的情形下，我们总想只付出最小的代价.

例如，投入一定的成本如何获得最大的利润？制作满足一定要求的器皿如何使用料最省？完成一项任务如何使工效最高？这类问题都叫作优化问题.

我们曾经探讨过不少优化问题. 解决问题的方法也是五花八门：判别式方法，平均不等式法，线性规划方法，差分方法以及利用二次函数的性质等等.

不少优化问题，可以化为求函数最值的问题. 导数方法是解决这类问题的有效工具.

例 1 有一边长为 a 的正方形铁片，铁片的四角截去四个边长为 x 的小正方形，然后做成一个无盖方盒（图 3－30）.

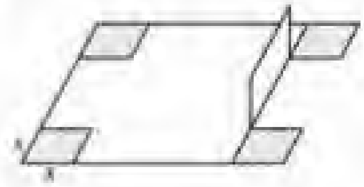


图 3－30

(1) 试把方盒的容积 V 表示成 x 的函数；(2) 求 x 多大时，做成方盒的容积 V 最大.

解 (1) 方盒的高为 x，底面是边长为 $a-2x$ 的正方形，所以

$V=V(x)=x(a-2x)^2\left(a>0,\ x\in\left[0,\ \frac{a}{2}\right]\right)$.

(2) 为了求 $V(x)$ 在 $\left[0,\ \frac{a}{2}\right]$ 上的最大值点，要求出它在 $\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$ 内部的极大值点. 为此求出 $V'(x)=(4x^3-4ax^2+a^2x)'=12x^2-8ax+a^2=(2x-a)(6x-a)$.

$V'(x)$ 有两个零点：$x_1=\frac{a}{6}$，$x_2=\frac{a}{2}$. 由二次函数性质可知 $V'(x)$

在 $x=\frac{a}{6}$ 处由正变负，故 $V(x)$ 在 $x_1=\frac{a}{6}$ 处取极大，对应的极大值 $V\left(\frac{a}{6}\right)=\left(\frac{a}{6}\right)\left(\frac{2a}{3}\right)^2=\frac{2a^3}{27}$.

由于 $V(0)=V\left(\frac{a}{2}\right)=0$，故 $V(x)$ 在 $\left[0,\ \frac{a}{2}\right]$ 上的最大值就是 $V(x_1)=\frac{2a^3}{27}$，即当 $x=\frac{a}{6}$ 时，做成方盒的容积 V 最大.

例 2 如图 3-31，某种罐装饮料设计每罐容积为 250 cm³，罐的形状为圆柱体，圆柱侧面的厚度为 0.5 mm，上下底厚度为 1.0 mm，如何设计罐体才能使原材料用量最少？做一个罐至少用多少 cm³ 的原材料？

解 设圆柱体的高为 h cm，底面半径为 x cm，则其体积为 $\pi h x^2=250$ cm³.

由此得到 $h=\frac{250}{\pi x^2}$.

圆柱的侧面积 $S_1=2\pi x h=\frac{500}{x}$ (cm²).

圆柱上下底面积之和 $S_2=2\pi x^2$ (cm²).

图 3-31

需要的原材料体积为：

$V(x)=0.05S_1+0.1S_2=\left(\frac{25}{x}+0.2\pi x^2\right)$ (cm³) $(x>0)$.

$V'(x)=0.4\pi x-\frac{25}{x^2}$.

$V'(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上有唯一的零点 $x_0=\left(\frac{62.5}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$.

由于 $V'(1)<0$，$V'(5)>0$，可见 $V'(x)$ 在 x_0 处由负变正.

于是，$V(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上有唯一的极小值点 x_0，即最小值点.

因此罐体的底面半径应为 $r=\sqrt[3]{\frac{62.5}{\pi}}=2.71$ (cm).

罐体的高应为 $h=\frac{250}{\pi r^2}=10.84$ (cm).

所需的原材料体积为

$$V(2.71)=13.84\ (\text{cm}^3).$$

例 3 让一个木块从光滑斜面的上端自由滑落到下端. 给定斜面两端的水平距离为 d，如何选择斜面和水平面之间的角度 x，才能使从上端到下端滑落所用的时间最短？

解 木块在光滑斜面上自由下滑，是初速为零的匀加速运动，其运动方程为 $s=\frac{at^2}{2}$（a 是加速度）. ①

如图 3－32，木块在前进方向所受的力为 $mg\sin x$，所以它的加速度

$$a=g\sin x\ (g\text{ 是重力加速度}). \quad ②$$

图 3－32

将②代入①，得到木块的运动方程

$$s=\frac{t^2 g\sin x}{2}. \quad ③$$

木块从上端到下端经过的路程为 $s=\frac{d}{\cos x}$，代入③得到：

$$\frac{d}{\cos x}=\frac{t^2 g\sin x}{2}. \quad ④$$

由④解出从上端到下端滑落所用的时间

$$t=\sqrt{\frac{2d}{g\sin x\cos x}}. \quad ⑤$$

由题意，要求的是⑤的右端关于变量 x 的最小值点，即函数

$$f(x)=\sin x\cos x\quad \left(x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

的最大值点. 而 $f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$ 在 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上有唯一零点 $x_0=\frac{\pi}{4}$. 又因 $f'(0)>0$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，故 $f'(x)$ 在 x_0 处由正变负，所以 $f(x)$ 在 $x=x_0=\frac{\pi}{4}$ 处取到极大，也是最大.

根据正弦倍角公式，有 $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$，立刻知道当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时 $\sin 2x=1$，所以 $\sin x\cdot\cos x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处取到最大值. 可见有时有些问题可用初等方法.

最后得到结论：斜面和水平面之间的角度 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，木块从光滑斜面的上端自由滑落到下端所用的时间最短.

例 4 生产某种新商品 n 件的成本为（$5\,000+10n$）元. 市场分析预期当年的销售量 Q 和出厂价 x 的关系为 $Q=15\,000-6x^2$. 如何确定出厂价 x，才能使此种商品当年的毛利润最大？这时的销售量和

毛利润各是多少？

解 毛利润＝销售量×出厂价－成本，而成本由销售量确定，销售量是出厂价 x 的函数，所以可以把利润写成 x 的函数.

$$\begin{aligned} L(x) &= Qx-(5\,000+10Q) \\ &= x(15\,000-6x^2)-(5\,000+10(15\,000-6x^2)) \\ &= -6x^3+60x^2+15\,000x-155\,000. \end{aligned}$$

由于 $x<10$ 必然赔本，$x>50$ 又卖不出去，故设 $x\in[10, 50]$.

求得
$$\begin{aligned} L'(x) &= -18x^2+120x+15\,000 \\ &= 6(-3x^2+20x+2\,500). \end{aligned}$$

$L'(x)$ 在$[10,50]$上只有一个零点

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{10+20\sqrt{19}}{3} \\ &= 32.392\,7. \end{aligned}$$

计算出 $L(x_0)=189\,912$，$L(10)=-5\,000$，$L(50)=-50\,000$，可见 $L(x)$ 在 x_0 处取到极大值 1 899 120（图 3－33）.

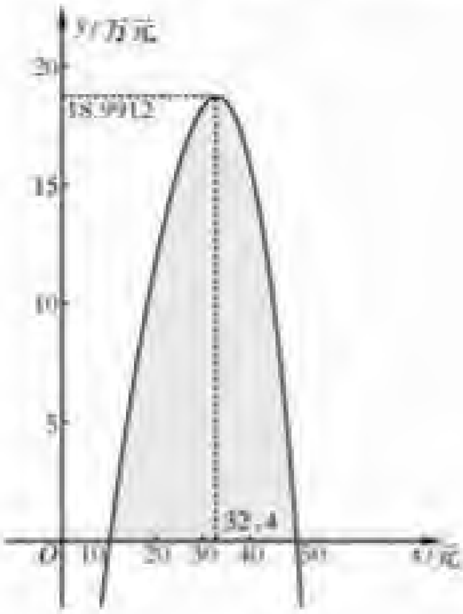


图 3－33

结论：出厂价定为 32.4 元时当年的毛利润最大，对应的销售量为

$$Q=15\,000-6x^2=8\,701(\text{件}).$$

对应的毛利润为

$$8\ 701\times 32.4-(5\ 600+10\times 8\ 701)=189\ 902(\text{元}).$$

想一想，最后算出的毛利润和 $L(x)$ 的极大值略有不同，为什么？

实际作计划时，出厂价、销售量和毛利润可能是多少？

例 5 江轮逆水上行 300 km，水速为 v(km/h)，船相对于水的速度为 x(km/h)．已知行船时每小时的耗油量为 cx^2，即与船相对于水的速度的平方成正比．问 x 多大时，全程的耗油量最小？

解 船的实际速度为 $x-v$，故全程用时为 $\frac{300}{x-v}$(h)．所以耗油量关于 x 的函数为：

$$H(x)=\frac{300cx^2}{x-v}\quad (c>0,\ v>0,\ x>v).$$

求得

$$\begin{aligned}H'(x)&=300c\left(\frac{2x}{x-v}-\frac{x^2}{(x-v)^2}\right)\\&=\frac{300c(2x(x-v)-x^2)}{(x-v)^2}\\&=\frac{300cx(x-2v)}{(x-v)^2}.\end{aligned}$$

$H'(x)$ 在 $(v,+\infty)$ 上有唯一零点 $x_0=2v$，并且 $H'(x)$ 在 $(v,2v)$ 上为负，在 $(2v,+\infty)$ 上为正，可见 $H(x)$ 在 $x=2v$ 时取到最小（图 3－34）．即当 $x=2v$ 时，全程的耗油量最小．

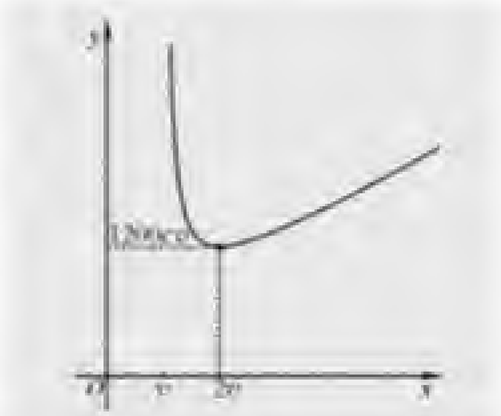


图 3－34

实际上，行船时还有其他开支，船还应当在预定的时间到达目的地，不能把耗油量最小作为主要的决策因素．

练　习

将一长为 8 cm，宽为 5 cm 的矩形纸张，四角截去相同大小的正方形，然后折叠成一个无盖的纸框．试问，截去的正方形其边长为多长时，才能使得纸框的容积最大？

习题 9

学而时习之

1. 已知等腰三角形的周长是 $2l$（定数），问它的腰多长其面积为最大？并求其最大的面积．
2. 求证：

   （1）同一个圆的内接矩形中，正方形面积最大；

   （2）同一个圆的内接等腰三角形中，等边三角形面积最大．
3. 把半径为 R 的金属球切削成圆柱形的零件，要使切下来的金屑最少，那么这个圆柱形零件的高应为多少？
4. 已知圆柱形罐头盒的体积是 V（定数），问它的高与底面半径多大能使罐头盒的表面积为最小？
5. 企业管理者通过对某收音机制造厂做上午班工人工作效率的研究表明，一个中等技术水平的工人，从 8:00 开始工作，t 小时后可装配晶体管收音机的个数为

   $$Q(t)=-t^3+9t^2+12t.$$

   问这个工人从 8:00 到 12:00 何时的工作效率最高？

温故而知新

6. 要设计一个容积为 $V=20\pi\ \mathrm{m}^3$ 的有盖圆柱形贮油桶，已知上盖单位面积造价是侧面的一半，而侧面单位面积造价又是底面的一半，问贮油桶半径 r 取何值时总造价最低？

7. B 在 A 东 10 km，C 在 B 北 3 km，现在要修一条从 A 到 C 的公路，从 A 到 B 的方向路线报价是 4 000 万元/km，沿其他路线是 5 000 万元/km，问如何设计线路最省钱？

8. 计划修建一条水渠，它的横断面是彼此全等的等腰梯形，设这梯形的底边与侧边的长等于常数 b（如图 3－35 所示）。为了获得最大的流量，应当使横断面的面积尽可能大，问这时水渠应当有怎样的坡度？

图 3－35

9. 从半径为 R 的圆形铁片中剪去一个扇形（如图 3－36 所示），将剩余部分围成一个圆锥形漏斗，问剪去的扇形的圆心角多大时，才能使圆锥形漏斗的容积最大？

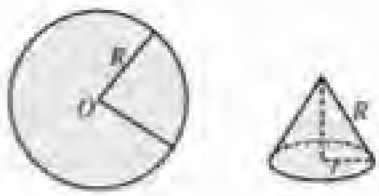


图 3－36

小结与复习

一、指导思想

微积分的创立是人类科学文化史上的一件大事，是数学发展中的一座里程碑．它的发展和应用标志着近代数学时期的到来．

我们引进了函数概念，自然界和人类社会中的大量实际问题中的数量关系可以用变量和函数的数学模型来刻画．如何研究这大量的丰富多彩的函数呢？正是微积分的创立，提供了研究变量和函数的重要的方法和有效的手段．

导数概念是微积分的核心概念之一，它有着极其丰富的实际背景和广泛的应用．导数是函数的导数．函数概念的丰富性决定了导数的实际背景和应用的丰富性．

物理上的运动方程可以表示成函数．研究物体运动就要考虑平均速度和瞬时速度．平均速度向瞬时速度的过渡，引出了导数概念．

函数可以用几何上的曲线表示．研究曲线涉及割线和切线．割线斜率向切线斜率的逼近，同样引向导数概念．

各种各样的实际问题中提出的函数模型，都刻画了变化的过程．要度量变化的快慢就用到变化率．从平均变化率到瞬时变化率的过渡，自然要产生导数概念．

导数概念一旦形成，就在研究函数的性质中显示出了威力．我们曾经用过不同的方法讨论函数的单调性和极值问题，导数方法则提供了最一般的简洁有力的解决方案．

导数概念的产生，体现出新的数学思想和数学方法．

求瞬时速度、求切线斜率的时候，开始我们不知道什么是瞬时速度，不知道什么是切线．我们面临的任务是双重的：既要建立瞬

时速度的概念和切线的概念，又要找到计算的方法．这样一箭双雕的处理，是微积分中常用的思想和方法．

求瞬时速度、求切线斜率，计算工作是在一个无穷逼近过程中完成的．这叫作极限运算，它不同于学过的四则运算和函数运算，是充满新意的一种数学运算，它给数学注入了新的力量、新的思想．对极限运算的理论探讨和应用研究，在牛顿、莱布尼兹创立微积分之后，持续了200年之久！

学习这一章，我们着重要体会导数的思想及其丰富的内涵；感受新的数学思想和方法在解决实际问题中的力量；初步了解微积分的文化价值，为以后进一步学习微积分打下基础．

二、内容提要

1．导数概念及其几何意义：

（1）从平均速度过渡到瞬时速度；

（2）用割线斜率逼近切线斜率；

（3）函数的平均变化率趋于瞬时变化率，即导数．

2．导数的运算：

（1）几个幂函数的导数公式的由来；

（2）基本初等函数的求导公式和导数运算基本法则．

3．导数在研究函数中的运用：

（1）根据导数的正负判断函数的增减性；

（2）函数在某点取得极值的必要条件和充分条件；

（3）三次函数的增减性和极值和它在闭区间上的最值．

4．来自生活实践的若干优化问题的案例．

5．微积分创立的简史及其在人类文化中的意义和价值．

三、学习要求和要注意的问题

1．了解导数概念的实际背景和几何意义：

（1）通过由物体运动的平均速度过渡到瞬时速度的过程，了解导数概念的物理背景．

（2）通过观察分析曲线的割线逼近切线时其斜率的变化趋势，直观地理解导数概念的几何意义．

（3）通过对大量实例的分析，经历由函数的平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道函数的瞬时变化率就是导数，体会导数的思想和内涵．

（4）注意，这里所说的变化，在数学上是指自变量改变时对应的函数值的变化．所谓变化率，就是函数值的改变量和对应的自变量的改变量的比值，即差分和步长的比．但这里的步长可正可负．

（5）函数的导数也是函数，所以就有导数的导数，即二次导数；对二次导数的物理意义和几何意义，应有初步的了解．

2．掌握一些函数的求导方法：

（1）能够根据定义求下列函数的导数：

$$y=c,\quad y=x,\quad y=x^2,\quad y=x^3,\quad y=\frac{1}{x};$$

（2）能够使用导数公式表和导数的四则运算法则求简单函数的导数．

3．能够应用导数研究函数的性质：

（1）通过对大量函数及其导数图象的观察，了解函数的增减和导数的正负之间的关系；

（2）结合函数的图象，了解函数在某一点取得极值的必要条件和充分条件；

（3）会用导数求不超过三次的多项式函数的极大值和极小值，以及它在闭区间上的最大值和最小值．

4．增强应用意识，用导数方法解决一些实际中提出的优化问题：

如利润最大、用料最省、效率最高等问题．特别注意如何从实际问题中选择适当的自变量，确定目标函数，把实际问题提炼成自己能够解决的数学问题．

5．了解微积分的文化价值：

阅读课本上的材料，从网上或其他书刊上收集有关微积分创立

的时代背景和有关人物的资料，进行交流；体会微积分的建立在人类文化发展中的意义和价值。

四、参考例题

例 1 竖直上抛的一个物体，其高度 h（单位：m）和抛出时间 t（单位：s）之间有函数关系

$$h=f(t)=2+10t-4.9t^2.$$

(1) 求物体抛出的初速，以及抛出 2 s 后的瞬时速度和高度；并问这时物体在上升还是下降？

(2) 此物体在抛出后多久达到最高点，此时高度是多少？

解 (1) 求出 $f(t)$ 的导数

$$f'(t)=10-9.8t.$$

$f'(0)=10$，即上抛初速为 10 (m/s)；

$f'(2)=-9.6$，即抛出后 2 s 时瞬时速度为 -9.6 (m/s)；

瞬时速度为负，表明此时物体在下降；

物体此时高度为 $f(2)=2.4$ (m)。

(2) 物体到达最高点时，其瞬时速度为 0，即

$$f'(t)=10-9.8t=0.$$

解得 $t=1.02$，即物体在抛出后 1.02 s 达到最高点。

此时物体的高度为 $f(1.02)=7.1$ (m)。

例 2 研究函数

$$g(x)=\sqrt{x}-ax\ (x>0)$$

的增减性和极值。

解 求导数得

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-a.$$

分两种情形：

若 $a\leqslant 0$，$g'(x)$ 恒为正，$g(x)$ 递增；

若 $a>0$，解方程

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-a=0,$$

得

$$x=r=\frac{1}{4a^2},$$

于是可知，$g'(x)$在$(-1,r)$上为正，在$(r,+\infty)$上为负，$g'(r)=0$.

可见，$g(x)$在$(-1,r)$上递增，在$(r,+\infty)$上递减，在$x=r$处取到极大.

例3 设计一种正四棱柱形冰箱，它有一个冷冻室和一个冷藏室，冷藏室用两层隔板分为三个抽屉．问：如何设计它的外形尺寸，能使得冰箱体积$V=0.5\ m^3$为定值时，它的表面和三层隔板（包括冷冻室的底层）面积之和S值最小.

解 设冰箱高度为h，底面正方形边长为x（$x>0$），则有

$$V=x^2h=0.5,\quad h=\frac{0.5}{x^2},$$

$$S=S(x)=5x^2+4xh=5x^2+\frac{2}{x}.$$

问题化为求$S(x)$的最小值．将$S(x)$求导数得：

$$S'(x)=10x-\frac{2}{x^2},$$

解方程$S'(x)=0$得$x=0.58$.

易见$10x$和$-\frac{2}{x^2}$在$(0,+\infty)$上递增，故$S'(x)$在$(0,0.58)$上为负，在$(0.58,+\infty)$上为正，即$S(x)$在$(0,0.58)$上递减，在$(0.58,+\infty)$上递增，在$x=0.58$处取到最小值．对应地，高度$h=1.49$．可见冰箱底面正方形边长为0.58 m，高度为1.49 m较为合理.

复习题三

学而时习之

1. 根据所给的运动方程，先写出物体在时间段 $[u,\ u+d]$ 和 $[u-d,\ u]$ 上的平均速度，再让 d 趋于 0，求出它在 $t=u$ 处的瞬时速度.

(1) $s(t)=a+vt$；　　(2) $s(t)=\frac{gt^2}{2}$；

(3) $s(t)=5+3t-\frac{gt^2}{2}$；　　(4) $s(t)=2t^2-5t+c$.

2. 根据所给的函数表达式，先写出函数曲线过两指定点 P，Q 的割线的斜率，再让指定点 Q 趋于点 P，求出曲线在点 P 处的切线的斜率.

(1) $y=c(x)=3$，$P=(2,\ 3)$，$Q=(2+h,\ 3)$；

(2) $y=L(x)=\frac{x}{2}+1$，$P=(2u,\ u+1)$，$Q=(2u+h,\ L(2u+h))$；

(3) $y=f(x)=x-x^2$，$P=(2,\ -2)$，$Q=(2+h,\ f(2+h))$；

(4) $y=g(x)=x^3-2x$，$P=(2,\ 4)$，$Q=(2+d,\ g(2+d))$；

(5) $y=D(x)=\frac{2}{x+1}$，$P=(1,\ 1)$，$Q=(1+h,\ D(1+h))$.

3. 写出下列几何量关于自变量在指定区间 $[u,\ v]$ 上的平均变化率和在该区间两端点处的瞬时变化率.

(1) 边长为 x 的正方形的周长，$u=a$，$v=b$ $(a<b)$；

(2) 边长为 x 的正三角形的面积，$u=0$，$v=c$ $(c>0)$；

(3) 半径为 x 的圆的面积，$u=1$，$v=R$ $(R>1)$；

(4) 直径为 x 的球的表面积，$u=1$，$v=D$ $(D>1)$；

(5) 半径为 x 的球的体积，$u=r$，$v=R$ $(R>r)$.

4. 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=\sin(x+3t)$；　　(2) $f(x)=e^{x^2}$；

(3) $f(x)=2t^{x}+\frac{s}{x}-7xs+\sin x^{2}$.

5. 求下列函数的导数，并指出函数的单调区间.

(1) $y=-x^3-2x^2-4x+5$；　　(2) $y=3x^4-4x^3-12x^2+18$；

(3) $y=(x+1)(x^2-1)$.

6．求下列函数的极值：

(1) $y=x^3-3x^2-9x+5$；　　(2) $y=x^3-12x^2+15x+1$；

(3) $y=2-(x^2-1)^2$；　　(4) $y=x+\frac{a^2}{x}\ (a>0)$.

7．求下列函数在所给区间上的最大值与最小值：

(1) $y=2x^3-15x^2+36x-24$，$x\in[1,4]$；

(2) $y=x^3-3x+5$，$x\in\left[-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$.

8．已知物体的运动方程是 $s=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$.

(1) 什么时间位移为 0？

(2) 什么时间速度为 0？

温故而知新

9．(1) 求内接于半径为 R 的球并且体积最大的圆柱的高；

(2) 求内接于半径为 R 的球并且体积最大的圆锥的高.

10．一窗户的上部是半圆，下部是矩形．如果窗户面积一定，当圆半径与矩形高的比为何值时，窗户周长最小？

11．求下列函数的导数：

(1) $y=3\sin x+2\cos x$；

(2) $y=(x-1)(x^2+x+1)$；

(3) $y=x^2(x^3-1)$；

(4) $y=(x^n+a^n)(x^2+a^n)$；

(5) $y=\sin^3(3x)\cos^2(4x)$.

12．求曲线 $y=x^2+px+q$ 与 x 轴相切的条件.

13．求曲线 $y=5\sqrt{x}$ 上与直线 $y=2x-4$ 平行的切线的方程.

14．试问 a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取极值？它是极大值还是极小值？并求此极值.

15．如果函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足条件 $b^2-3ac<0$，试证明 $f(x)$ 无

极值.

16. 用总长 14.8 m 的钢条制作一个长方体容器框架，如果所制容器的底面的一边比另一边长 0.5 m，那么高为多少时，容器的容积最大？并求出最大容积.

17. 生产某种产品的成本 C 是产量 x 的函数 $C(x)$，总收益 R 为产品价格 p 与产量 x 之积，即 $R=px$. 如果成本函数 $C(x)=x^3-84x^2+1900x+500$，试求产量 x 为多少时，所获利润最大.

上下而求索

18. 等差数列与等比数列的项数相同，它们的一切项数都是正的，且有相同的首项、末项，试比较两数列的各项之和的大小，并证明你的判断.

附 录

数学词汇中英文对照表

（按词汇所在页码的先后排序）

中文名	英 文 名	页 码
命题	proposition	2
真命题	true proposition	3
假命题	false proposition	3
原命题	original proposition	5
逆命题	converse proposition	5
否命题	negative proposition	5
逆否命题	converse-negative proposition	5
充分条件	sufficient condition	9
必要条件	necessary condition	9
充分必要条件	sufficient and necessary condition	9
当且仅当	if and only if	9
等价	equivalent	9
非	not	14
且	and	14
或	or	15
全称量词	universal quantifier	18
存在量词	existential quantifier	18
椭圆	ellipse	30
焦点	focus	30
焦距	focal length	30
标准方程	standard equation	31
中心	center	35
顶点	vertex	36
长轴	major axis	36

长半轴	major half axis	36
短轴	minor axis	36
短半轴	minor half axis	36
双曲线	hyperbola	41
实轴	real axis	46
虚轴	imaginary axis	46
渐近线	asymptote	47
抛物线	parabola	54
准线	directrix	54
轴	axis	57
圆锥曲线	conic section	61
导数	derivative	94
导函数	derived function	94
极大值	maximun value	117
极小值	minimun value	117
极值	extreme value	117